

# Il fenomeno del tunneling in meccanica quantistica e in ottica

F Piazza

Dipartimento di Fisica, Via G. Sansone 1, Polo scientifico, 50019 Sesto F.no (FI) Italy

4 dicembre 2001

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Il gradino di potenziale . . . . .	2
1.2	La barriera di potenziale: analogia con la riflessione totale frustrata . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Il problema del tempo di tunneling</b>	<b>6</b>
2.1	Il <i>phase time</i> . . . . .	6
2.2	Il <i>dwell time</i> . . . . .	7
2.3	Il <i>Larmor time</i> . . . . .	7
2.4	Il caso della barriera oscillante . . . . .	8
<b>3</b>	<b>L'effetto tunnel in giunzioni Josephson</b>	<b>8</b>
3.1	Misura del tempo di tunneling . . . . .	10

## 1 Introduzione

In meccanica quantistica si parla di *tunneling* quando una particella penetra una regione classicamente inaccessibile dove la sua energia potenziale è superiore alla sua energia totale (barriera di potenziale). L'immagine che la parola inglese ci suggerisce è proprio quella di una *galleria* scavata dalla particella alla *quota* della sua energia  $E$  nella regione di spazio proibita.

Molte sono le situazioni in vari ambiti della fisica dove si ha a che fare con il tunneling quantistico, dalla fisica nucleare alla fisica dello stato solido e molto interessante è l'analogia che esiste con alcuni fenomeni dell'ottica, per i quali è possibile stabilire quantitativamente un parallelo con il formalismo della meccanica quantistica. Inoltre, lo studio del tunneling quantistico ha sollevato l'importante problema del *tempo di tunneling*. È questo un quesito che attacca i fondamenti stessi della meccanica quantistica e al quale a tutt'oggi non esiste una risposta univoca soddisfacente.

In questa relazione cercherò di dare una panoramica del tunneling quantistico in generale e delle sue applicazioni in alcuni campi importanti della fisica. Cercherò di illustrare le analogie che esistono con l'ottica, mantenendomi aderente agli esempi riportati. Infine, cercherò di dar conto del dibattito sul tempo di tunneling nella sua prospettiva storica, esponendo il problema con chiarezza e citando e commentando le più importanti soluzioni apparse nella letteratura.

## 1.1 Il gradino di potenziale

Supponiamo di avere una particella di massa  $m$  in una dimensione avente energia  $E$  e soggetta al potenziale

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x \geq 0 \end{cases} . \quad (1)$$

La funzione  $U(x)$  è detta gradino di potenziale (*potential step*). Supponiamo dapprima che sia  $E > V_0$ . La soluzione dell'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo si può scrivere nel modo seguente

$$\psi(x) = \begin{cases} A \left[ e^{ikx} + \left( \frac{k-k'}{k+k'} \right) e^{-ikx} \right] & x < 0 \\ A \left( \frac{2k}{k+k'} \right) e^{ikx} & x \geq 0 \end{cases} , \quad (2)$$

dove

$$\hbar k' = \sqrt{2m(E - V_0)}, \quad \hbar k = \sqrt{2mE}$$

e la costante  $A$  è fissata dal valore del flusso incidente. Si vede che la soluzione al problema è data da un termine che descrive il flusso incidente, un termine che descrive quello riflesso e un termine infine che descrive il flusso trasmesso. Una prima differenza con il caso classico esiste anche se non esistono regioni dello spazio classicamente proibite. Per vederlo è sufficiente calcolare il coefficiente di trasmissione  $\mathcal{T}$ , definito come il rapporto tra la corrente trasmessa  $j_T$  e la corrente incidente  $j_I$ , dove la corrente è definita come

$$j = -\frac{i\hbar}{2m} \left[ \psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right] . \quad (3)$$

Si ha

$$\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R} = \frac{4kk'}{(k+k')^2} ,$$

dove con  $\mathcal{R}$  abbiamo indicato il coefficiente di riflessione. Si vede facilmente che sia  $\mathcal{T}$  che  $\mathcal{R}$  sono minori di uno, mentre classicamente la riflessione è rigorosamente nulla e la trasmissione totale.

Le differenze con il mondo classico diventano ancora più sorprendenti se consideriamo il caso  $E < V_0$ . In tal caso l'impulso della particella nella zona classicamente proibita  $x > 0$  diventa immaginario, il che significa che la funzione d'onda non è più quella di un'onda piana che si propaga trasportando una corrente, ma un'onda che si attenua esponenzialmente (a volte chiamata onda evanescente) senza trasportare alcuna corrente.<sup>1</sup> La particella esiste dunque anche nella regione classicamente interdotta. Notiamo che in questo caso si recupera parzialmente la descrizione classica, nel senso che il coefficiente di trasmissione è identicamente nullo (come osservato è nulla la corrente trasportata da un'onda evanescente).

Facciamo adesso due importanti osservazioni. Cosa succede se considero il problema in due dimensioni (ad esempio il piano  $x, y$ ) e introduco nel computo angoli di incidenza diversi da zero? Consideriamo una particella soggetta al potenziale

$$U(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x \geq 0 \end{cases} , \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>Notiamo che questo è un fatto generale riguardante tutte le funzioni d'onda  $\phi$  che possono essere scritte nella forma  $\phi = c\phi_0$ , con  $\phi_0$  funzione reale e  $c$  costante (anche complessa).

che incida sulla barriera con angolo  $\phi = \arctan(k_y/k_x) \neq 0$ . Sia  $E > V_0$  e sia inoltre  $\phi'$  l'angolo con il quale la particella penetra nella regione della barriera. Si ha

$$k_x = \begin{cases} k \cos \phi & x < 0 \\ k' \cos \phi' & x \geq 0 \end{cases}, \quad k_y = \begin{cases} k \sin \phi & x < 0 \\ k' \sin \phi' & x \geq 0 \end{cases}, \quad (5)$$

dove  $\hbar k = \sqrt{2mE}$  e  $\hbar k' = \sqrt{2m(E - V_0)}$ . Non è difficile dimostrare che

$$\frac{\sin \phi'}{\sin \phi} = \frac{k}{k'} = \sqrt{\frac{E}{E - V_0}}.$$

Si è dunque ottenuta una legge formalmente identica alla ben nota legge di Snell per la rifrazione. L'impulso in meccanica quantistica gioca il ruolo dell'indice di rifrazione del mezzo in ottica. In particolare, la condizione di riflessione totale  $\sin \phi' = 1$  dà l'angolo critico  $\phi_c$

$$\sin \phi_c = \frac{k'}{k} = \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}$$

Il coefficiente di trasmissione risulta in questo caso

$$\mathcal{T}(\phi) = \frac{4k \cos \phi \sqrt{k'^2 - k^2 \sin^2 \phi}}{\left[ k \cos \phi + \sqrt{k'^2 - k^2 \sin^2 \phi} \right]^2}$$

e si vede che  $\mathcal{T}(\phi = \phi_c) = 0$ . Questo è un chiaro risultato della natura ondulatoria della meccanica quantistica.

A proposito dell'analogia indice di rifrazione  $\rightarrow \propto$  impulso nel passaggio dall'ottica alla meccanica quantistica, notiamo che si tratta di un fatto più generale. Scriviamo l'equazione delle onde in una dimensione per un mezzo con indice di rifrazione dipendente dalla posizione

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left( \frac{2\pi n(x)}{\lambda} \right)^2 \psi = 0.$$

Non è difficile rendersi conto che l'equazione appena scritta è formalmente identica all'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo con

$$n(x) \rightarrow \frac{\lambda}{2\pi} k(x) = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{2m[E - U(x)]/\hbar^2}.$$

Di fatto il parallelo tra ottica e meccanica quantistica funziona (in alcuni casi speciali) bene se della meccanica quantistica si considerano le soluzioni stazionarie. Daremo un altro esempio di questo parallelo in seguito nella trattazione della cosiddetta riflessione totale frustrata in ottica.

Bisogna porre comunque molta attenzione nel notare che il parallelo si fa molto più insidioso quando si vogliono studiare fenomeni non stazionari in meccanica quantistica. In questo caso è la natura intrinsecamente non relativistica della meccanica ondulatoria che pone delle limitazioni non banali all'uso di formalismi mutuati dalla teoria dell'elettromagnetismo, teoria invece invariante per trasformazioni di Lorentz.

Un caso tipico è per l'appunto il problema del tempo di tunneling. In altre parole, in meccanica quantistica non esistono effetti di ritardo. Ciò significa che, data una particella in una certa condizione iniziale  $\psi(x, 0)$  al tempo  $t = 0$  in un certo potenziale, la funzione d'onda  $\psi(x, \varepsilon)$  è diversa da zero in tutto lo spazio per tempi  $t = \varepsilon$  piccoli a piacere. Per vederlo

**CONTICINO DI PAOLO**

Torneremo più avanti sul problema del tempo di tunneling. Concludiamo questo paragrafo facendo una importante osservazione generale sulle scale temporali nel caso di penetrazione di una particella in una regione classicamente inaccessibile. Nella regione proibita la particella è descritta da una funzione d'onda esponenziale decrescente della forma  $\exp(-kx)$  con  $k = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$ . Dunque, se vogliamo misurare un intervallo di tempo (ad esempio il tempo di transito in un intervallo  $\Delta x$ ), abbiamo a disposizione una regione di dimensione  $\Delta x \approx 1/k$ . Questo corrisponde a introdurre un'incertezza nell'impulso della particella  $\Delta p \approx \hbar/\Delta x$  e dunque un'incertezza nella sua energia  $\Delta E = \Delta p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m \approx V_0 - E$ . Dunque localizzare la particella in una regione dove la sua ampiezza sia sufficiente per rivelarla significa non essere più sicuri che la sua energia sia in effetti minore della barriera  $V_0$ .

## 1.2 La barriera di potenziale: analogia con la riflessione totale frustrata

Il fatto che in meccanica quantistica una particella possa penetrare in una regione classicamente inaccessibile ci porta all'importante fenomeno del tunneling. Si consideri una barriera di potenziale in una dimensione, descritta dalla seguente funzione

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad (6)$$

Una soluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria per una particella di energia  $E < V_0$  è data da

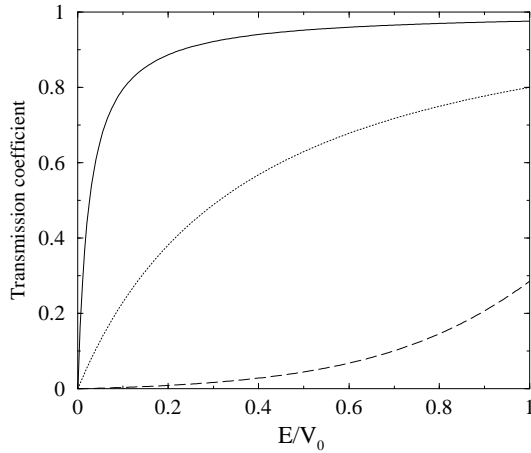


Figura 1: Andamento del coefficiente di trasmissione (8) per una barriera quadrata di ampiezza  $a$  e altezza  $V_0$ . Curva continua:  $k_0 a = 0.1$ , curva punteggiata:  $k_0 a = 1$ , curva tratteggiata  $k_0 a = 10$  (barriera opaca).

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + \sqrt{\mathcal{R}(E)} e^{i\beta} e^{-ikx} & x < 0 \\ C(k, k') e^{-k'x} + D(k, k') e^{k'x} & x \in [0, a] \\ \sqrt{\mathcal{T}(E)} e^{i\alpha} e^{ikx} & x > a \end{cases}, \quad (7)$$

dove

$$\hbar k' = \sqrt{2m(V_0 - E)}, \quad \hbar k = \sqrt{2mE}$$

e si sono esplicitati gli sfasamenti  $\alpha$  e  $\beta$  subiti dalle funzioni d'onda rispettivamente trasmessa e riflessa. Il coefficiente di trasmissione, dato dal rapporto tra la corrente trasmessa e quella incidente, risulta

$$\mathcal{T}(E) = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2 ka}{4E/V_0(1 - E/V_0)}} \quad (8)$$

Si osservi che tale coefficiente aumenta monotonamente all'aumentare dell'energia della particella per  $E < V_0$  (vedi figura 1). Inoltre, la barriera è tanto più trasparente a parità di energia quanto minore è il rapporto  $k_0 a = a\hbar/\sqrt{2mV_0}$ .

Il problema appena discusso ha un importante analogo in ottica, il fenomeno della cosiddetta riflessione totale frustrata. Quando un raggio di luce incide sulla superficie di separazione tra due mezzi, parte di esso viene trasmesso nel secondo mezzo e parte viene riflesso indietro nel primo. Se comunque l'indice di rifrazione del primo mezzo  $n_1$  è maggiore di quello del secondo mezzo  $n_2$ , e l'angolo d'incidenza supera il valore critico  $\phi_c = \arcsin(n_2/n_1)$  si ha riflessione totale. Il coefficiente di trasmissione si annulla e

tutta la luce viene riflessa. La riflessione totale è accompagnata da un fenomeno intrigante, scoperto da Newton, e studiato da molti altri scienziati dopo di lui, tra cui Fresnel, Young e Huygens. Si tratta della penetrazione nel secondo mezzo di un'onda evanescente, che si attenua esponenzialmente con la distanza dalla superficie di separazione tra i due mezzi. Supponiamo ora di avvicinare al primo mezzo un terzo mezzo di indice di rifrazione  $n_3 \approx n_1$ , in modo che il secondo mezzo diventi un film sottile il cui spessore  $d$  sia paragonabile alla lunghezza d'onda  $\lambda$  della radiazione impiegata. La riflessione totale risulta in questo caso *frustrata*, un termine introdotto per la prima volta nel 1947 da Leurgans e Turner [1]. In tal caso una frazione apprezzabile della radiazione viene trasmessa e può essere misurata in uscita dal terzo mezzo. È possibile calcolare il coefficiente di trasmissione in funzione dei tre indici di rifrazione  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  e dell'angolo di incidenza  $\phi$  per radiazione polarizzata perpendicolarmente o parallelamente al piano di incidenza.<sup>2</sup> Nel caso speciale  $n_1 = n_3 = n_0$ ,  $n_2 = 1$  si ottiene [2]

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1 + \alpha \sinh^2 y} \quad , \quad (9)$$

dove

$$\alpha_{\perp} = \frac{[(n_0^2 - 1)/2n_0]^2}{\cos^2 \phi (n_0^2 \sin^2 \phi - 1)} \quad (10)$$

$$\alpha_{\parallel} = \alpha_{\perp} [(n_0^2 + 1) \sin^2 \phi - 1] \quad (11)$$

e

$$y = \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{n_0^2 \sin^2 \phi - 1} \quad .$$

Confrontando l'espressione (9) con l'espressione (8), ci si rende facilmente conto che le due scritte sono identiche, nel caso di polarizzazione perpendicolare al piano di incidenza, a patto di porre

$$\frac{mE}{\hbar^2} \rightarrow \frac{n_0^2 \pi^2}{4\lambda^2} \quad (12)$$

$$\frac{mV_0}{\hbar^2} \rightarrow \frac{(n_0^2 - 1)\pi^2}{2\lambda^2} \quad . \quad (13)$$

Si recupera ancora una volta l'analogia tra meccanica quantistica e ottica in un caso particolare, nello spirito dell'associazione indice di rifrazione  $\rightarrow$  vettore d'onda della particella. È comunque opportuno ricordare che i risultati della meccanica quantistica che stiamo citando a paragone sono quelli del problema stazionario. Inoltre, il caso dell'analogo in ottica è più ricco in gradi di libertà (più dimensioni spaziali oltre al grado di libertà della polarizzazione) rispetto al problema quantistico.

Un esempio importante di applicazione delle considerazioni appena svolte è il caso della cosiddetta riflessione totale *attenuata*. Supponiamo ad esempio che il secondo mezzo sia assorbente (costante dielettrica negativa, ossia indice di rifrazione immaginario) e che il terzo mezzo sia l'aria. È allora possibile, sotto opportune condizioni, l'eccitazione di una particolare classe di soluzioni delle equazioni di Maxwell note con il nome di plasmoni di superficie. Si tratta di onde che si propagano liberamente lungo la superficie di separazione tra il secondo mezzo e l'aria, ma la cui ampiezza decade esponenzialmente nelle direzioni perpendicolari a tale piano. Tale tecnica è molto usata in fisica dello stato solido nello studio delle proprietà dei film sottili metallici. È infatti possibile determinare con grande precisione ad esempio la costante dielettrica e lo spessore del film.

<sup>2</sup>Il piano d'incidenza è definito dalla normale alla superficie di incidenza e dal vettore d'onda della radiazione incidente.

## 2 Il problema del tempo di tunneling

Il problema del tempo di tunneling è forse altrettanto vecchio quanto la stessa meccanica quantistica. Comunque è solo negli anni '80 che il dibattito su questo tema è divenuto vivace e stimolante per una cospicua frazione della comunità scientifica, soprattutto a seguito del contributo di Büttiker e Landauer [3]. La definizione stessa di tempo di tunneling, contenuta nella formulazione del problema è materia di controversia. In generale, ci possiamo chiedere:

*Quanto tempo ha trascorso all'interno della barriera di potenziale una particella di data energia passata attraverso la barriera per effetto tunnel?*

Dalla formulazione del problema risulta chiaro che ogni soluzione debba contenere il tempo come variabile. In altre parole sembra essere in questione una misura del tempo necessario affinché si *instauri* la funzione d'onda stazionaria. Tuttavia, se ci si discosta troppo dal problema stazionario nello studio dell'evoluzione della funzione d'onda iniziale verso il suo comportamento asintotico, il principio di indeterminazione ci impedisce un'accurata definizione dell'energia della particella. Lo stesso problema è connesso come abbiamo visto alla determinazione della posizione della particella, necessaria alla misura di un qualsiasi intervallo di tempo.

### 2.1 Il *phase time*

Si consideri un pacchetto d'onda descritto da uno spettro piccato attorno a un certo valore  $k = k_0$  e molto piccato. Il pacchetto trasmesso è approssimativamente descritto da un set piccolo di componenti di Fourier della forma (si veda la funzione d'onda(7))

$$\sqrt{\mathcal{T}(E)} \exp[i\alpha(k) + ikx - iE(k)t/\hbar] \quad .$$

Per il principio della fase stazionaria, l'evoluzione temporale del centro del pacchetto  $x_p(t)$  è data dall'equazione

$$\frac{d\alpha}{dk} + x_p(t) - \frac{1}{\hbar} \frac{dE(k)}{dk} t = 0 \quad .$$

Si vede che il processo di tunneling comporta un ritardo spaziale  $\delta x$  dato da

$$\delta x = \frac{d\alpha}{dk}$$

nonché un ritardo temporale  $\delta t$ , dato da

$$\delta t = \frac{1}{v(k)} \frac{d\alpha}{dk} \quad ,$$

dove  $v(k) = \hbar^{-1} dE/dk = \hbar k/m$  è la velocità di gruppo del pacchetto. Si vede dunque che, fissati due punti a piacere  $x_1 < 0$  e  $x_2 > a$ , il tempo totale  $\tau^\phi(x_1, x_2)$  trascorso nel percorso da  $x_1$  a  $x_2$  è dato da

$$\tau^\phi(x_1, x_2) = \frac{1}{v(k)} \left[ x_2 - x_1 + \frac{d\alpha}{dk} \right] \quad . \quad (14)$$

Tale espressione è corretta, e in ottimo accordo con l'esperienza. Tuttavia non è una risposta al quesito sul tempo di tunneling, infatti descrive un moto che avviene nella maggior parte al di fuori della barriera. Preghiamo il lettore di soffermarsi sul fatto che l'espressione (14) è un'espressione asintotica, ricavata seguendo il moto del centro di massa di un pacchetto d'onda stretto in  $k$  e dunque largo spazialmente.

Questo pone in particolare dei vincoli sulla posizione dei punti  $x_1$  e  $x_2$ , che devono essere sufficientemente lontani dalla barriera. Per ottenere una stima del tempo di tunneling, molti furono tentati da un'extrapolazione lineare della formula (14) nella regione della barriera, ottenendo

$$\Delta\tau^\phi(a) = \frac{1}{v(k)} \left[ a + \frac{d\alpha}{dk} \right] . \quad (15)$$

Tuttavia, tale extrapolazione è in apparente contraddizione con le stesse ipotesi che sottendono la derivazione della (14). Lavori numerici susseguenti all'introduzione dell'espressione (15) hanno poi chiaramente messo in evidenza l'esistenza di fenomeni di auto-interferenza che rendono l'extrapolazione un processo non solo concettualmente arbitraria ma anche computazionalmente fuorviante. Citiamo comunque il risultato che si ottiene per una barriera di potenziale della forma (6) nel caso  $k_0 a \gg 1$  (barriera opaca)

$$\Delta\tau^\phi(a) = \frac{2m}{\hbar k k'} . \quad (16)$$

## 2.2 Il *dwell time*

Il *dwell time* (lett. tempo di permanenza) è stato introdotto per la prima volta da Smith [4] nel 1960. Esso è definito come

$$\Delta\tau^D(x_2, x_1; k) = \frac{1}{v(k)} \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x; k)|^2 dx , \quad (17)$$

dove  $x_1 < 0$  e  $x_2 > a$  sono due punti fissati a piacere e  $\psi(x; k)$  è la funzione d'onda di scattering (7).

Nonostante l'espressione (17) rappresenti una quantità ben definita e misurabile, essa non costituisce una buona risposta al quesito sul tempo di tunneling: infatti rappresenta una sorta di media ibrida che tiene conto sia delle particelle riflesse che di quelle trasmesse. Anche in questo caso citiamo il risultato che si ottiene per una barriera di potenziale della forma (6) nel caso  $k_0 a \gg 1$

$$\Delta\tau^D(a) = \frac{2mk}{\hbar k' k_0^2} . \quad (18)$$

Come si vede, i risultati (16) e (18) sono in profondo disaccordo l'uno con l'altro: in particolare si noti come il primo diverga per energie della particella piccole, mentre il secondo tende a zero nello stesso limite.

## 2.3 Il *Larmor time*

Qualche anno dopo, Baz' [5] propose di usare un campo magnetico per definire un tempo di tunneling. La sua idea è la seguente: immaginiamo di avere un campo magnetico omogeneo  $B$  diretto lungo  $z$  nella regione della barriera, e supponiamo che le particelle incidenti abbiano spin  $1/2$  e siano preparate in un autostato  $|x, +\rangle$ . La penetrazione della barriera sarà dunque accompagnata da una precessione nel piano  $xy$  caratterizzata dalla frequenza di Larmor  $\omega_L = gB/2m$ , dove  $g$  è il rapporto giromagnetico appropriato. Si può allora definire un tempo di tunneling mediante il valor medio dello spin nel seguente modo

$$\Delta\tau_L^y = \lim_{\omega_L \rightarrow 0} \frac{\langle S_y \rangle}{\hbar\omega_L/2} . \quad (19)$$

Neppure il larmor time è comunque una risposta soddisfacente al quesito sul tempo di tunneling. Il motivo risiede nell'azione di disturbo introdotta nella dinamica delle particelle dalle regioni, piccole ma

finite, dove il campo viene acceso e spento. Risulta che tali regioni agiscono come barriere riflettenti per le particelle e tale effetto è dello stesso ordine del campo.

Una importante osservazione di Büttiker [6] rese in seguito chiaro che, almeno nel caso di barriere opache, la precessione nel piano  $xy$  non è l'effetto predominante in una macchina di Larmor. Inizialmente le particelle sono immaginate in uno stato  $|x, +\rangle = 1/\sqrt{2}[|z, +\rangle + |z, -\rangle]$ . Tuttavia le componenti con spin parallelo alla direzione  $z$ , con energia potenziale minima ed energia cinetica massima, saranno trasmesse più facilmente di quelle con spin antiparallelo. Si può dunque definire, nel caso di una barriera opaca, un altro tempo di Larmor nel seguente modo

$$\Delta\tau_L^z = \lim_{\omega_L \rightarrow 0} \frac{\langle S_z \rangle}{\hbar\omega_L/2} . \quad (20)$$

Nel caso di una barriera della forma (6) risulta

$$\Delta\tau_L^z = \frac{d}{\hbar k'/m} . \quad (21)$$

Il significato di questo tempo non è tuttavia chiaro. Con i due tempi di Larmor (19) e (20), Büttiker e Landauer definirono quello che è noto come BT time

$$[\Delta\tau^{BL}]^2 = [\Delta\tau_L^y]^2 + [\Delta\tau_L^z]^2 . \quad (22)$$

Per barriere opache  $\Delta\tau^{BT} \approx \Delta\tau_L^z = md/\hbar k'$ .

## 2.4 Il caso della barriera oscillante

È interessante notare che il tempo di tunneling definito dalla (21) si ritrova nel lavoro originale di Büttiker e Landauer [3]. Essi considerarono una barriera di potenziale quadrata della forma (6) cui era aggiunto un termine oscillante del tipo  $V_1 \cos \omega t$ . Il punto è il seguente. Se il periodo  $2\pi/\omega$  è grande rispetto al tempo caratteristico dell'interazione con la barriera della particella, quest'ultima vedrà una barriera statica. Se viceversa la frequenza  $\omega$  è sufficientemente elevata, la particella potrà interagire con la barriera, scambiando quanti di energia  $\hbar\omega$  e l'intensità del fascio trasmesso differirà da quello incidente per la presenza di bande laterali a testimonianza dell'avvenuto scambio di energia con la barriera. Nel caso di barriera opaca, le intensità relative delle prime due bande (scambio di energia pari a  $\pm\hbar\omega$ ) risultano

$$\mathcal{I}_{\pm} = \left( \frac{V_1}{2\hbar\omega} \right)^2 [\exp(\pm\omega(md/\hbar k')) - 1]^2 ,$$

Identificando l'inverso della frequenza  $\omega_c$  che segna la transizione tra i regimi di alte e basse frequenze con il tempo caratteristico del tunneling, e tenendo conto che per barriere opache  $\Delta\tau^{BT}$  coincide praticamente con  $\Delta\tau_L^z = md/\hbar k'$ , sembra lecito identificare il tempo di tunneling con la definizione (22). È possibile confermare questa associazione per barriere rettangolari arbitrarie studiando il limite per  $\omega \rightarrow 0$  di  $\mathcal{I}_{\pm}$  [7].

Tuttavia anche questo argomento non è privo di pecche concettuali. Se per esempio si applica lo stesso contributo oscillante ad una barriera infinitamente stretta ( $a \rightarrow 0$ ) e alta ( $V_0 \rightarrow \infty$ ), descritta matematicamente da una  $\delta$  di Dirac di area  $V_0 a$ , si scopre che la frequenza caratteristica  $\omega_c$  rimane finita, mentre il tempo definito dalla (22) tende a zero per  $a$  che tende a zero. Neppure la definizione (22) sembra dunque dare una risposta definitiva al nostro quesito iniziale.

## 3 L'effetto tunnel in giunzioni Josephson

Un esempio interessante di tunneling in fisica dello stato solido è offerto dalle cosiddette giunzioni Josephson. Una giunzione Josephson è costituita da due materiali superconduttori (per semplicità considerati



nel seguito uguali) separati da un sottile strato di materiale isolante. Se la temperatura è superiore alla temperatura di transizione dei due superconduttori, la giunzione Josephson conduce per effetto tunnel di elettroni attraverso il film. In questo caso la conduzione è ohmica e la corrente attraverso la giunzione è proporzionale alla differenza di potenziale applicata. Al di sotto della temperatura di transizione, le coppie di Cooper riescono per effetto tunnel a oltrepassare la barriera di potenziale posta dal film sottile. In tal caso si può stabilire un flusso di corrente senza dissipazione in assenza di differenza di potenziale. (effetto Josephson *in continua*).

È possibile calcolare tale flusso di corrente nella sua forma generale nel seguente modo. Consideriamo una sezione del film, e sia  $x$  la direzione normale alle superfici di separazione superconduttore–film e film–superconduttore. Supponiamo inoltre che il film si estenda nell'intervallo  $\Delta x = [-d/2, d/2]$ . Il parametro d'ordine  $\Psi$ , cioè la funzione d'onda del condensato di coppie di Cooper, è un numero complesso di modulo pari alla densità di coppie  $n_s/2$  e la cui fase  $\phi$  rappresenta la fase della funzione d'onda di ciascun elettrone. Nello stato superconduttore essa è la stessa per tutti gli elettroni accoppiati. Notiamo per inciso che è proprio tale coerenza *macroscopica* che rende così intriganti gli effetti quantistici in dispositivi quali le giunzioni Josephson.

Il condensato di coppie all'interno del film è descritto da una funzione d'onda che si attenua esponenzialmente con la distanza dalle superfici di separazione con i materiali superconduttori. All'interno della barriera potremo dunque scrivere per il parametro d'ordine

$$\Psi = \sqrt{\frac{n_s}{2}} \left[ e^{i\phi_1 - k(x+d/2)} + e^{i\phi_2 + k(x-d/2)} \right] , \quad (23)$$

dove  $1/k$  è la lunghezza di decadimento caratteristica della barriera e  $\phi_i$  ( $i = 1, 2$ ) è la fase del parametro d'ordine nei due superconduttori. La corrente può essere calcolata mediante la formula generale (3). Si ottiene facilmente

$$j = j_0 \sin \Delta\phi \quad (24)$$

dove  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$  e

$$j_0 = \left( \frac{e\hbar n_s}{m} \right) k e^{-kd} .$$

Se si fa passare una corrente attraverso la giunzione, la differenza di fase  $\Delta\phi$  si aggiusta in modo da rispettare l'equazione (24). La massima corrente  $j_0$  (corrispondente a una differenza di fase  $\Delta\phi = \pi/2$ ) che una giunzione è in grado di sopportare in tali condizioni è detta corrente critica.

Ma cosa succede se si applica una differenza di potenziale alla giunzione? In tal caso ci aspettiamo che la funzione d'onda del condensato sia descritta da una funzione del tipo

$$\Psi \propto e^{-i\mu t/\hbar} ,$$

dove  $\mu$  rappresenta l'energia di una singola coppia. Più in generale, se  $\mu$  dipende dal tempo, ci possiamo aspettare

$$\Psi \propto e^{-i\phi(t)} ,$$

dove

$$\hbar \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\mu .$$

Dato che un superconduttore non è in grado di mantenere una differenza di potenziale, in condizioni normali  $\mu$  è uniforme e la relazione appena scritta non ha alcuna conseguenza. Se tuttavia si stabilisce

una differenza di potenziale  $\Delta V$  tra due superconduttori separati da un film sottile isolante, deduciamo che

$$\hbar \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \hbar \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = -\mu_1 + \mu_2 = 2e\Delta V \quad ,$$

che si può riscrivere nella più nota forma

$$\hbar \frac{\partial \Delta \phi}{\partial t} = 2e\Delta V \quad . \quad (25)$$

Siamo dunque a un passo dalla risposta al nostro quesito iniziale. Supponiamo che la differenza di potenziale applicata  $\Delta V$  sia costante. L'integrazione della (25) è immediata. Sostituendo il risultato nella (24) si ottiene

$$j = j_0 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{\Delta V}{\Phi_0} \right) t + \Delta \phi(0) \right] \quad , \quad (26)$$

dove si è introdotto il quanto di flusso  $\Phi_0 = 2.07 \times 10^{-15} \text{ V Hz}^{-1}$ . L'equazione (26) è la risposta alla nostra domanda: in presenza di una differenza di potenziale costante nasce nella giunzione una corrente alternata di ampiezza  $j_0$  e frequenza  $\omega_J = \Delta V/\Phi_0$ . Tale effetto va sotto il nome di effetto Josephson *in alternata* (AC Josephson effect).

### 3.1 Misura del tempo di tunneling

In questo paragrafo finale vogliamo descrivere un elegante esperimento effettuato alla fine degli anni '80 da Esteve e collaboratori [8], che ha permesso loro di fornire una misura sperimentale diretta del tempo di tunneling per un sistema molto speciale.

Si consideri una giunzione Josephson nella quale sia fatta passare una corrente esterna  $I$ . In generale, il comportamento di una giunzione Josephson può essere descritto da un circuito equivalente, composto da una capacità  $C$  (che descrive l'accumulo di carica all'interno della giunzione) e da una resistenza  $R$  (che tiene conto dei fenomeni di dissipazione), oltre che naturalmente dal termine di corrente superconduttiva (24). Indicando con  $V$  la differenza di potenziale ai capi della giunzione, si può scrivere

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} + I_0 \sin \Delta \phi = I \quad . \quad (27)$$

Usando l'equazione (25), la (27) può essere posta nella seguente forma

$$C \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\hbar \Delta \phi}{2e} \right) + \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \left( \frac{\hbar \Delta \phi}{2e} \right) + \frac{\hbar I_0}{2e} [\sin \Delta \phi - x] = 0 \quad (28)$$

dove  $x = I/I_0$ . L'equazione (28) è formalmente identica all'equazione di moto di una *particella* di *massa*  $C$ , soggetta ad attrito viscoso, nel potenziale

$$U(\Delta \phi) = -\frac{\hbar I_0}{2e} [\cos \Delta \phi + x \Delta \phi] \quad . \quad (29)$$

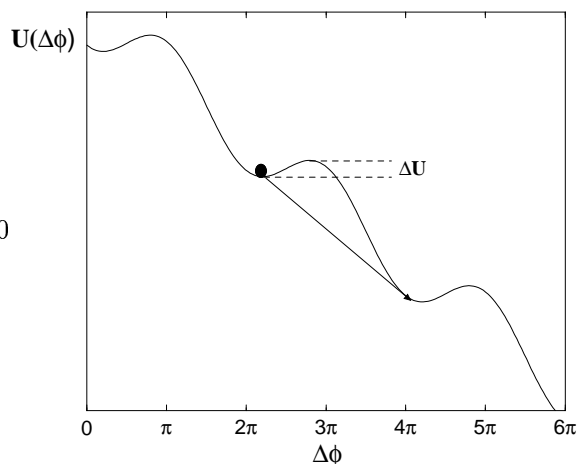


Figura 2: Grafico della funzione (29) per  $x = 0.6$ .

La funzione (29) è tracciata per  $I < I_0$  ( $x < 1$ ) in fig. 2. Nel caso stazionario  $d\Delta\phi/dt = V = 0$  la giunzione (o la particella nel minimo locale) oscilla attorno a una posizione di equilibrio stabile ( $\Delta\phi = 2n\pi + x$  con  $n = 0, 1, 2 \dots$ ) con la frequenza

$$\omega = \omega_0[1 + x^2]^{1/4} \quad , \quad (30)$$

dove  $\omega_0 = 2\pi I_0/C\Phi_0$ . Dalla posizione di equilibrio la giunzione può uscire superando per attivazione termica la barriera di potenziale  $\Delta U$  (vedi fig. 2). La probabilità per unità di tempo  $\Gamma_T$  per tale processo può essere espressa, nel caso di attrito debole, come

$$\Gamma_T = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right) e^{-\Delta U/k_B T} \quad . \quad (31)$$

Ma è possibile che la giunzione (o la particella equivalente) passi ad un minimo adiacente più favorevole energeticamente per effetto tunnel (freccia in fig. 2)? La risposta è sì. Si dimostra infatti rigorosamente che è possibile quantizzare l'equazione (28) [9]. La carica  $Q$  accumulata nella giunzione e la differenza di fase  $\hbar\Delta\phi/2e$  diventano variabili canoniche coniugate, dimodoché

$$Q = -i\hbar \frac{\partial}{\partial(\hbar\Delta\phi/2e)} \quad .$$

Il sistema è allora descritto dall'Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{Q^2}{2C} + U(\Delta\phi) \quad .$$

Osserviamo che si tratta di un fenomeno di tunneling molto peculiare, descritto dalla variabile macroscopica  $\Delta\phi$ . In letteratura si trova sovente adoperato l'acronimo MQT (macroscopic quantum tunneling).

Ma con che probabilità avviene il tunneling, e a che temperatura mi posso aspettare che esso diventi l'effetto dominante sulla fuga dal minimo locale per attivazione termica? Si prova che, per  $I$  non troppo distante da  $I_0$ , e nell'ipotesi di dissipazione trascurabile, la probabilità di tunneling per unità di tempo  $\Gamma_t$  risulta [10]

$$\Gamma_t \propto \left(\frac{\omega}{2\pi}\right) e^{-7.2\Delta U/\hbar\omega} \quad . \quad (32)$$

Per osservare il tunneling è necessario che sia  $\hbar\omega \geq 7.2k_B\hat{T}$ . Con i parametri numerici relativi all'esperimento in questione risulta  $\hat{T} \approx 60mK$ . Dunque l'effetto tunnel è ben osservabile misurando in funzione della temperatura la vita media dello stato stazionario  $V = 0$  della giunzione. Per  $T < \hat{T}$ , infatti, la probabilità di transizione a uno stato dinamico (inversamente proporzionale alla vita media dello stato stazionario) è costante. Non solo. È stato anche possibile misurare il tempo di tunneling, misurando la vita media dello stato stazionario. Questo non sarebbe possibile direttamente se non si trattasse di un fenomeno macroscopico, come abbiamo detto. In pratica è il circuito stesso che decade per effetto tunnel. Questo si riflette nell'ordine di grandezza dei tempi di tunneling misurati, che si aggirano attorno alle decine di picosecondi. Facciamo notare che per distanze dell'ordine delle distanze atomiche e velocità tipiche degli elettroni, i tempi di tunneling risultano almeno tre ordini di grandezza inferiori.

I risultati dell'esperimento hanno confermato per il tempo di tunneling  $\Delta\tau$  la validità dell'espressione

$$\Delta\tau = \frac{dm}{\hbar k'} = \sqrt{\frac{md^2}{2(V_0 - E)}} \quad .$$

Supponendo valida in questo caso l'ipotesi di barriera opaca, vediamo che l'esperimento conferma l'espressione teorica (22).

## Riferimenti bibliografici

- [1] P. J. Leurgans e A. F. Turner, *J. Opt. Soc. Am.* **37**, 983 (A) (1947).
- [2] S. Zhu, A. W. Yu, D. Hawley e R. Roy, *Am. J. Phys.* **54**(7), 601 (1985).
- [3] M. Büttiker e R. Landauer, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1739 (1982).
- [4] F. T. Smith, *Phys. Rev.*, **188**, 349 (1960).
- [5] A. J. Baz', *Sov. J. Nucl. Phys.*, **5**, 635 (1967).
- [6] M. Büttiker, *Phys. Rev.*, **27**, 6178 (1983).
- [7] M. Büttiker e R. Landauer, *Phys. Scr.* **32**, 429 (1985).
- [8] D. Esteve *et al.*, *Physica Scr.*, **T29**, 121 (1989).
- [9] U. Eckern, G. Schön e V. Ambegaokar, *Phys. Rev. B*, **30**, 6419 (1985).
- [10] R. F. Voss e R. A. Webb, *Phys. Rev. Lett.*, **47**, 265 (1981).