# Il piano inclinato

## Guida alla risoluzione di esercizi di dinamica

Un buono schema generale per la risoluzione degli esercizi di dinamica è il seguente:

1. disegnare il diagramma delle forze per ciascun corpo
2. scrivere l'equazione vettoriale $\vec{F} = m\vec{a}$ per ciascun corpo, con $\vec{F}$ risultante di tutte le forze agenti sul corpo
3. scegliere uno o più sistemi di riferimento e scomporre la seconda equazione della dinamica in componenti
4. controllare di avere scritto un numero di equazioni (almeno) pari al numero di incognite del problema
5. risolvere il sistema di equazioni.

Nel seguito, mettiamo in pratica questo schema in due casi.

## Dispositivo di Atwood

Il dispositivo di Atwood è disegnato in Fig. 1. Due corpi di massa $M_1$ e $M_2$ uniti da una fune ideale (inestensibile e di massa trascurabile) pendono ai capi opposti di una carrucola senza attrito. Ci proponiamo di calcolare l'accelerazione dei due corpi e la tensione della fune.

I diagrammi delle forze sono disegnati in Fig. 4. Con ovvio significato dei simboli scriviamo la seconda legge della dinamica in forma vettoriale nel seguente modo

$$\begin{aligned} M_1\vec{a}_1 &= \vec{T} + \vec{P}_1 \\ M_2\vec{a}_2 &= \vec{T} + \vec{P}_2 \end{aligned} \tag{1}$$

La tensione della fune si trasmette invariata ai due capi poiché possiamo trascurare la sua massa. Scegliamo l'asse $z$ verticale diretto verso l'alto. Si ha dunque

$$\vec{a}_1 = \ddot{z}_1\hat{k} \qquad \vec{a}_2 = \ddot{z}_2\hat{k} \quad .$$

D'altra parte la fune è inestensibile, e quindi i due pesi si muovono rigidamente l'uno rispetto all'altro, con la differenza che spostamenti positivi dell'uno corrispondono a spostamenti negativi dell'altro e viceversa, cioè $\Delta z_1 = -\Delta z_2$. Ciò significa che

$$\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2 = a$$

dove abbiamo introdotto il simbolo $a$ per l'accelerazione in valore assoluto uguale dei due corpi.

La scomposizione delle equazioni (1) lungo l'asse $z$ dà

$$\begin{aligned} T - M_1 g &= M_1 a \\ T - M_2 g &= -M_2 a \quad , \end{aligned} \tag{2}$$

dove $T = |\vec{T}|$ è il modulo della tensione. Sottrando membro a membro si ottiene

$$(M_2 + M_1)a = (M_2 - M_1)g$$

da cui

$$a = g \left[ \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \right] \quad . \tag{3}$$

In accordo all'intuizione osserviamo che $M_2 > M_1 \Longrightarrow a > 0$, cioè $M_1$ sale e $M_2$ scende, mentre $M_2 < M_1 \Longrightarrow a < 0$, cioè $M_1$ scende mentre $M_2$ sale.

Per calcolare il valore di $T$ moltiplichiamo la prima delle equazioni (2) per $M_2$ e la seconda per $M_1$ e sottraiamo membro a membro. Si ottiene

$$T(M_2 - M_1) = 2M_2 M_1 a \quad .$$

Ricordando l'espressione (3) si ha infine

$$T = \frac{2M_2 M_1\, g}{M_2 + M_1} = 2\mu g \tag{4}$$

dove abbiamo introdotto la *massa ridotta* $\mu = M_1 M_2/(M_2 + M_1)$. Notiamo che nel caso di masse uguali $M_2 = M_1 = M$ si ha $\mu = M/2$ e di conseguenza $T = Mg$.

## Dispositivo di Fletcher

Il dispositivo di Fletcher è disegnato in Fig. 2. Due corpi di massa $M_1$ e $M_2$ sono uniti da una fune ideale che passa su di una carrucola senza attrito. Uno dei due corpi (sia $M_2$) poggia su di un piano inclinato senza attrito, mentre l'altro pende in verticale. Ci proponiamo di calcolare l'accelerazione dei due corpi e la tensione della fune.

I diagrammi delle forze sono disegnati in Fig. 5. Con ovvio significato dei simboli scriviamo la seconda legge della dinamica in forma vettoriale nel seguente modo

$$\begin{aligned} M_1 \vec{a}_1 &= \vec{T} + \vec{P}_1 \\ M_2 \vec{a}_2 &= \vec{T} + \vec{P}_2 + \vec{N} \end{aligned} \tag{5}$$

Di nuovo, la tensione della fune si trasmette invariata ai due capi poiché possiamo trascurare la sua massa. Scegliamo per descrivere il moto di $M_1$ l'asse $z$ verticale diretto verso l'alto e un sistema $xy$ con asse $x$ parallelo alla superficie del piano per $M_2$ (vedi figura). Si ha dunque

$$\vec{a}_1 = \ddot{z}_1 \hat{k}_1 \qquad \vec{a}_2 = \ddot{x}_2 \hat{i}_2 + \ddot{y}_2 \hat{j}_2 \quad .$$

Ragioniamo come prima: la fune è inestensibile, e quindi i due pesi si muovono rigidamente l'uno rispetto all'altro. In accordo alla scelta degli assi che abbiamo operato, spostamenti positivi di $M_1$ in direzione $z_1$ corrispondono a spostamenti positivi di $M_2$ in direzione $x_2$ e viceversa, cioè $\Delta z_1 = \Delta x_2$. Inoltre $\Delta y_2 = 0$ sempre. Ciò significa che

$$\ddot{z}_1 = \ddot{x}_2 = a \qquad \ddot{y}_2 = 0$$

dove abbiamo introdotto il simbolo $a$ per l'accelerazione in valore assoluto uguale dei due corpi.

La scomposizione delle equazioni (5) in componenti dà

$$\begin{aligned} M_2 a &= M_2 g \sin\theta - T \\ M_1 a &= T - M_1 g \quad , \end{aligned} \tag{6}$$

dove $T = |\vec{T}|$ è il modulo della tensione. Sommando membro a membro si ottiene

$$(M_2 + M_1)a = (M_2 \sin\theta - M_1)g$$

da cui

$$a = g\left[\frac{M_2 \sin\theta - M_1}{M_2 + M_1}\right] \quad . \tag{7}$$

Osserviamo che $M_2 > M_1/\sin\theta \implies a > 0$, cioè $M_1$ sale e $M_2$ scende, mentre $M_2 < M_1/\sin\theta \implies a < 0$, cioè $M_1$ scende mentre $M_2$ sale. Il valore critico $M_2 = M_1/\sin\theta$ corrisponde all'equilibrio ($a = 0$). Notiamo che l'aver posto il peso $M_2$ su du un piano inclinato ha prodotto un aumento del valore critico di $M_2$ corrispondente all'equilibrio rispetto al caso in cui anche $M_2$ pende in verticale. In tal caso infatti abbiamo visto che il valore critico è $M_2 = M_1$.

Per calcolare il valore di $T$ moltiplichiamo la prima delle equazioni (6) per $M_1$ e la seconda per $M_2$ e sottraiamo membro a membro. Si ottiene

$$T(M_2 + M_1) = M_2 M_1 (1 + \sin\theta) \quad ,$$

da cui

$$T = \frac{M_2 M_1\, g(1 + \sin\theta)}{M_2 + M_1} = \mu g\,(1 + \sin\theta) \tag{8}$$

Per verificare se il risultato è fisicamente corretto, immaginiamo di aumentare l'inclinazione del piano fino al limite in cui $M_2$ è verticale ($\theta = \pi/2$). In tale limite l'espressione (8) coincide con l'espressione della tensione della fune nel dispositivo di Atwood (equazione( 4)), come ci aspettiamo.

# Esercizi di dinamica del punto materiale

**Esercizio 1**

Un punto materiale di massa $M_1$ è attaccato a un'estremità di una fune ideale di lunghezza $L_1$, fissata per l'altro estremo a un punto fisso O. Una seconda particella di massa $M_2$ è attaccata a una seconda fune ideale di lunghezza $L_2$, fissata per l'altro capo alla prima particella. Il sistema ruota con velocità angolare costante $\omega$ attorno al punto O. Supponendo che il moto avvenga su di un piano senza attrito, calcolare la tensione di ciascuna fune.

**Dati numerici** $M_1 = 1$ Kg, $M_2 = 2$ Kg, $L_1 = 0.4$ m, $L_2 = 0.3$ m, $\omega = 10$ rad/sec.

**Esercizio 2**

Dal balcone del terzo piano di una casa si deve calare una massa $M$ con una fune ideale, il cui carico di rottura è $T_r$.

1. Si può calare tale massa a velocità costante senza che si spezzi la fune?

2. In caso contrario, con quale accelerazione minima dovrebbe essere calato il carico?

**Dati numerici** $M = 150$ Kg, $T_r = 1245$ N.

**Esercizio 3**

Una massa $M$ di dimensioni trascurabili è ferma in equilibrio al centro di una buca rettangolare, alle cui pareti è collegata da due molle di costante elastica $k_1$ e $k_2$. Sia $L$ la larghezza della buca, $L/4$ la lunghezza a riposo delle due molle e $\mu_s$ il coefficiente di attrito statico tra il corpo e il fondo della buca. Calcolare:

1. la forza di attrito e discutere il suo verso,

2. il valore limite di $M$ oltre il quale la massa si muove dal centro della buca,

3. la nuova posizione di equilibrio del corpo nel caso in cui il fondo della buca sia liscio. Se si sposta la massa di una certa distanza $\Delta x$, dimostrare che la massa si muove di moto armonico e calcolarne il periodo.

## Esercizio 4

Un corpo di massa $M$ si muove su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_s$ e coefficiente di attrito dinamico $\mu_d$. Esso è fissato a un'estremità di una molla di lunghezza a riposo $L_0$ e costante elastica $k$, vincolata all'altro capo al punto fisso O.

1. Discutere le condizioni di equilibrio. In particolare, calcolare lo spostamento minimo dalla posizione di equilibrio corrispondente a $\mu_s = 0$ tale da mettere il corpo in movimento.

2. Dimostrare che si tratta di un moto armonico e scriverne la legge oraria, supponendo che la velocità iniziale sia nulla. Quanto vale il periodo?

3. Ripetere i calcoli nel caso che il piano sia inclinato di un angolo $\theta$ rispetto all'orizzontale.

## Esercizio 5

Un punto materiale è fermo si di un piano inclinato che forma un angolo $\theta$ con l'orizzontale. Il coefficiente di attrito statico è $\mu_s$ e il coefficiente di attrito dinamico è $\mu_d$.

1. Quale è il valore massimo di $\theta$ per cui il punto rimane fermo rispetto al piano?

2. Se $\theta = \pi/6$, quanto tempo impiega il punto materiale a percorrere la distanza $L$ lungo il piano inclinato partendo da fermo?

## Esercizio 6

Tre corpi di massa $M_1$, $M_2$ e $M_3$ sono uniti da due funi ideali e si muovono su di un piano senza attrito (vedi figura). Una forza costante $F$ viene applicata al corpo $M_3$.

1. Calcolare l'accelerazione del sistema e la tensione di ciascuna fune.

2. Ripetere i calcoli nel caso in cui il piano sia inclinato di un angolo $\theta$.

3. Ripetere i calcoli dei primi due punti nel caso in cui tra i corpi e la superficie del piano vi sia attrito con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d$.

**Dati numerici** $M_1 = 10$ Kg, $M_2 = 15$ Kg, $M_3 = 20$ Kg, $\theta = 2^o$, $\mu_d = 0.1$.

## Esercizio 7

Nel dispositivo in figura il corpo A è collegato da una fune ideale al corpo B ed è solidale a un'estremità di una molla di costante elastica $k$. Calcolare:

1. L'allungamento della molla.
2. L'equazione del moto del sistema.
3. Il periodo delle oscillazioni.

Ripetere i calcoli dei tre punti nel caso in cui tra il piano e il corpo A sia presente attrito con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d$.

**Dati numerici** $M_A = M_B = 2$ Kg, $k = 200$ N/m, $\mu_d = 0.2$.