C.d.L. in Ingegneria dell'Ambiente e delle Risorse

Indice

Capitolo 1

Elementi di analisi vettoriale

1.1 Definizioni

Un vettore è un segmento orientato, che dunque è caratterizzato da una direzione e un verso oltre che da una lunghezza. In analisi vettoriale la lunghezza di un vettore si chiama *modulo*. Vettori di modulo unitario si chiamano *versori*. Una grandezza *scalare* indica invece un numero. Ad esempio, il modulo di un vettore è una grandezza scalare.

I vettori si sogliono indicare con una freccetta, ad esempio $\vec{a}$. Il modulo del vettore $\vec{v}$ si indica con $|\vec{v}|$ o, più semplicemente, con v.

Consideriamo il vettore $\vec{a}$. Esso individua una direzione nello spazio. Il versore di tale direzione si indica con

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a} \quad . \tag{1.1}$$

È evidente dall'equazione (1.1) che $|\hat{a}| = |\vec{a}|/|\vec{a}| = 1$, cioè si tratta realmente di un versore.

1.2 Scomposizione di un vettore in componenti in due dimensioni

Consideriamo un vettore $\vec{b}$ in due dimensioni, e fissiamo gli assi cartesiani x e y nel piano in modo da far coincidere l'origine del vettore con l'origine degli assi. Fissiamo inoltre due versori diretti secondo gli assi (Fig. 1.1). È convenzione indicare tali versori nel seguente modo

$$\hat{\imath} \quad \text{versore} \parallel \text{all'asse } x \tag{1.2}$$

$$\hat{\jmath} \quad \text{versore} \parallel \text{all'asse } y \tag{1.3}$$

Indichiamo con b_x e b_y le proiezioni del vettore sugli assi (si tratta chiaramente di due grandezze scalari). Per definizione la proiezione di un vettore su una retta si

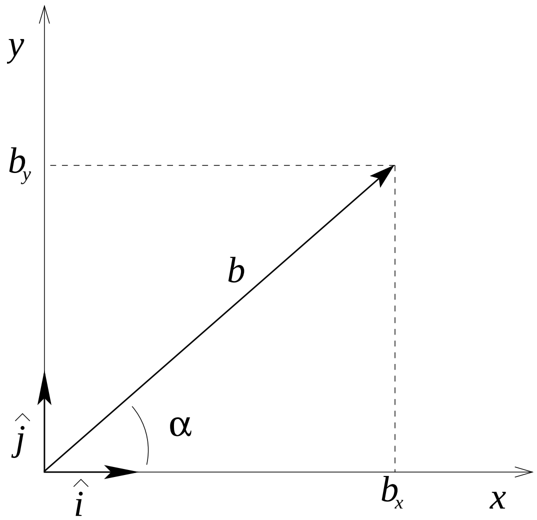

Figura 1.1: *Scomposizione di un vettore secondo un sistema di assi cartesiani in due dimensioni.*

ottiene abbassando le perpendicolari alla retta dagli estremi del vettore. È evidente dalla figura che valgono le seguenti identità

$$b_x = b \cos\alpha \tag{1.4}$$

$$b_y = b \sin\alpha \quad , \tag{1.5}$$

dove abbiamo indicato con b il modulo del vettore $\vec{b}$. È chiaro che il vettore $\vec{b}$ può essere scomposto nella somma vettoriale (ricordate la regola del parallelogramma) dei due vettori $b_x\hat{i}$ e $b_y\hat{j}$

$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} \quad . \tag{1.6}$$

La scomposizione (1.6) permette di calcolare il modulo del vettore e l'angolo α che esso forma con l'asse x in modo semplice. Si ha

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} \qquad \tan\alpha = \frac{b_y}{b_x} \quad . \tag{1.7}$$

Convenzionalmente gli angoli si misurano a partire dall'asse x fissando il verso positivo nella rotazione antioraria. Inoltre, è bene ricordare che le componenti si intendono con il loro segno. Queste considerazioni sono importanti per la scelta del ramo corretto della tangente nell'inversione della formula (1.7) per determinare l'angolo α.

Esempio 1

Supponiamo di voler calcolare l'angolo formato dal vettore $\vec{b} = -3\hat{i} + 3\hat{j}$ con l'asse x. La formula (1.7) ci dice che

$$\tan\alpha = \frac{-3}{3} = -1 \tag{1.8}$$

Riportando tale valore sul grafico della tangente, ci rendiamo conto che i valori di α che soddisfano l'Eq. (1.8) sono due, $\alpha = \pi/4$ e $\alpha = \pi/4 + \pi/2$ (fate il disegno!). Quale valore dobbiamo scegliere? Date le convenzioni che abbiamo assunto per la misura degli angoli, la risposta corretta è $\alpha = \pi/4 + \pi/2$. Ripetete il calcolo per il vettore $\vec{b} = -3\hat{i} - 3\hat{j}$. Quale è il valore di α in questo caso?

1.3 Scomposizione di un vettore in componenti in tre dimensioni

La stessa scomposizione può essere estesa senza difficoltà al caso tridimensionale. Consideriamo un vettore $\vec{b}$ in tre dimensioni. Fissata una terna di assi cartesiani,

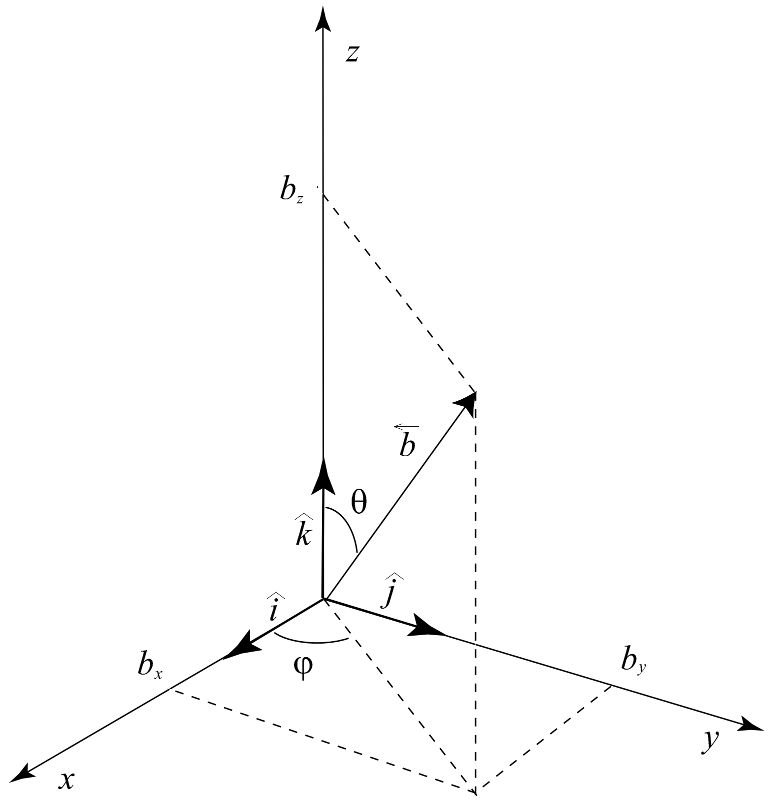

Figura 1.2: *Scomposizione di un vettore secondo una terna di assi cartesiani in tre dimensioni.*

fissiamo tre versori diretti lungo gli assi. Il versore parallelo all'asse z si indica convenzionalmente con $\hat{k}$ (Fig. 1.2). Indichiamo con b_x, b_y e b_z le proiezioni del vettore sui tre assi. La scomposiozione di $\vec{b}$ prende in questo caso la forma

$$\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k} \quad . \tag{1.9}$$

Il modulo di $\vec{b}$ risulta ancora semplicemente calcolabile secondo il teorema di Pitagora

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \tag{1.10}$$

In tre dimensioni, due angoli sono sufficienti a determinare l'orientazione di un vettore rispetto agli assi coordinati. Oltre all'angolo φ (è convenzione in tre dimensioni usare la lettera φ) formato dalla proiezione di $\vec{b}$ sul piano xy con l'asse x, è necessario introdurre un altro angolo solamente. È convenzione introdurre il cosiddetto angolo azimutale θ, formato dal vettore $\vec{b}$ con l'asse z (vedi Fig. 1.2). Si ha allora

$$b_x = b \sin\theta \cos\varphi \tag{1.11}$$
$$b_y = b \sin\theta \sin\varphi \tag{1.12}$$
$$b_z = b \cos\theta \tag{1.13}$$

da cui non é difficile ricavare le espressioni che permettono di calcolare gli angoli φ e θ in funzione delle componenti di $\vec{b}$. Si ha

$$\cos\varphi = \frac{b_x}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \qquad \cos\theta = \frac{b_z}{b} \quad . \tag{1.14}$$

La convenzione per la misura dell'angolo φ é la medesima del caso bidimensionale. Per l'angolo θ si assume l'origine in corrispondenza dell'asse z. È chiaro che, se assumiamo che φ vari nell'intervallo $[0, 2\pi]$, l'intervallo di variabilità dell'angolo θ si riduce a $[0, \pi]$. In particolare, si ha $\theta = 0$ per vettori paralleli all'asse z e $\theta = \pi$ per vettori antiparalleli all'asse z.

Esempio 2

Supponiamo di voler calcolare gli angoli φ e θ per il vettore $\vec{b} = \sqrt{2}\hat{\imath} + \hat{\imath} - \hat{z}$. Il modulo di $\vec{b}$ è

$$b = \sqrt{2+1+1} = 2 \quad .$$

Dalle Eq. (1.14) si ha allora

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \cos\theta = -\frac{1}{2} \quad .$$

Se riportiamo sul grafico del coseno il valore $\cos\varphi = \sqrt{2/3}$, si individuano due angoli, uno compreso tra 0 e $\pi/2$ e l'altro compreso tra $3\pi/2$ e 2π (tracciate il grafico del coseno e riportatevi la retta $\cos\varphi = \sqrt{2/3}$). Quale dei due devo scegliere? Secondo la convenzione adottata, la risposta corretta è la prima. Riguardo all'angolo azimutale, il valore $\cos\theta = -1/2$ corrisponde agli angoli $\theta = \pi/2 + \pi/6$ e $\pi + \pi/3$. In questo caso, sappiamo che il valore corretto è $\theta = \pi/2 + \pi/6$ dato che per definizione $\theta \in [0, \pi]$ (disegnate l'angolo θ nel piano individuato dall'asse z e dal vettore $\vec{b}$).

1.4 Somma di vettori e prodotto di un vettore per uno scalare

La somma vettoriale è definita attraverso la nota regola del parallelogramma (vedi Fig. 1.3). In particolare, essa gode delle proprietà *associativa*,

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \tag{1.15}$$

e *commutativa*,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad . \tag{1.16}$$

Il prodotto di un vettore $\vec{a}$ per uno scalare m ha come risultato un vettore con la stessa direzione di $\vec{a}$ e modulo ma. Il prodotto di un vettore per uno scalare gode delle proprietà *associativa*,

$$mn\,\vec{a} = m(n)\,\vec{a} = (m)n\,\vec{a} \quad , \tag{1.17}$$

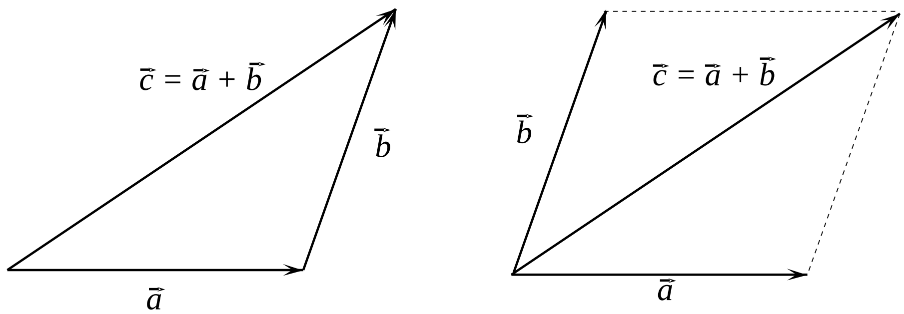

Figura 1.3: *Costruzioni geometriche del parallelogramma per il calcolo della somma vettoriale.*

commutativa,

$$mn\,\vec{a} = nm\,\vec{a} \tag{1.18}$$

e *distributiva* rispetto alla somma,

$$(m+n)\,\vec{a} = m\,\vec{a} + n\,\vec{a} \quad . \tag{1.19}$$

La rappresentazione dei vettori in componenti permette di calcolare somme e prodotti di vettori per scalare in modo semplice. Consideriamo i vettori

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \qquad \vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k} \quad . \tag{1.20}$$

I vettori somma $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$ e differenza $\vec{D} = \vec{a} - \vec{b}$ sono dati in componenti dalle seguenti espressioni

$$\vec{S} = (a_x + b_x)\hat{\imath} + (a_y + b_y)\hat{\jmath} + (a_z + b_z)\hat{k} \tag{1.21}$$

$$\vec{D} = (a_x - b_x)\hat{\imath} + (a_y - b_y)\hat{\jmath} + (a_z - b_z)\hat{k} \quad . \tag{1.22}$$

Il prodotto del vettore $\vec{a}$ per uno scalare m si scrive in componenti come

$$m\,\vec{a} = (m\,a_x)\hat{\imath} + (m\,a_y)\hat{\jmath} + (m\,a_z)\hat{k} \quad . \tag{1.23}$$

La somma e la differenza di due vettori nel piano xy sono rappresentate graficamente in Fig. 1.4.

1.5 Prodotto scalare

Il prodotto scalare è un'applicazione matematica che associa a due vettori uno scalare. Siano dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Il prodotto scalare di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si indica con $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ed è definito nel seguente modo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta_{ab} \quad , \tag{1.24}$$

dove θ_{ab} è l'angolo formato dai due vettori. Si noti come il prodotto scalare di due vettori perpendicolari qualsiasi è sempre nullo.

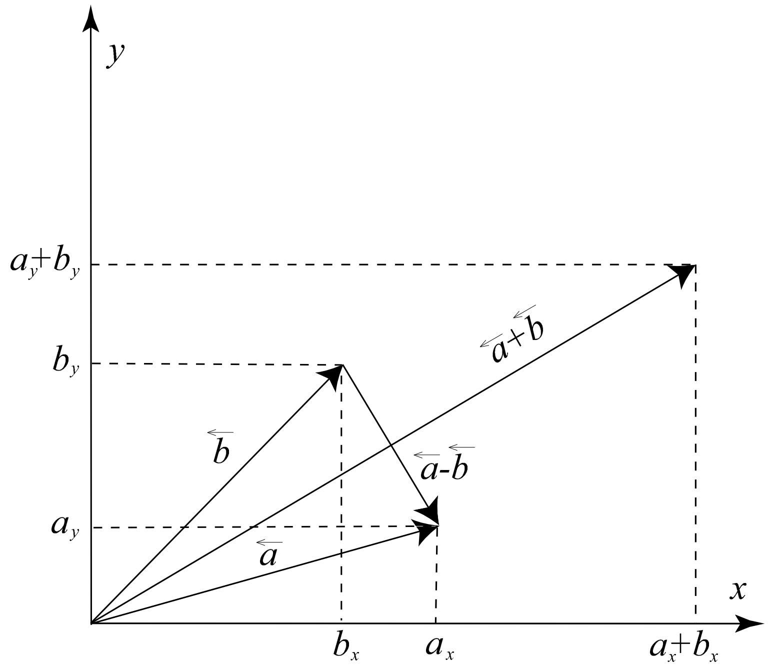

Figura 1.4: *Rappresentazione grafica della somma vettoriale in componenti (Eq. (1.21) con $a_z = b_z = 0$).*

Un primo semplice esempio è costituito dal prodotto scalare dei versori coordinati. Si ha

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \tag{1.25}$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0 \quad . \tag{1.26}$$

L'interpretazione geometrica del prodotto scalare è legata al concetto di proiezione di un vettore su una retta, la cui direzione sia identificata da un certo versore. In particolare, **la proiezione di un vettore sulla retta è pari al prodotto scalare tra il vettore e il versore della retta**. Il primo semplice esempio riguarda le componenti di un vettore $\vec{a}$, che, come sappiamo, sono le proiezioni del vettore sugli assi, ossia sulle direzioni identificate dai versori coordinati $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$. Si ha infatti, nel caso generale (vedi Fig. 1.2),

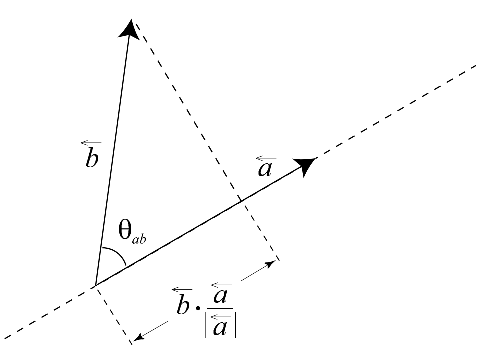

Figura 1.5: *Proiezione di un vettore $\vec{b}$ sulla direzione identificata da un vettore $\vec{a}$ arbitrario.*

$$a_x = \vec{a} \cdot \hat{i} \tag{1.27}$$

$$a_y = \vec{a} \cdot \hat{j} \tag{1.28}$$

$$a_z = \vec{a} \cdot \hat{k} \tag{1.29}$$

Il caso della proiezione di un vettore $\vec{b}$ sulla direzione identificata da un vettore $\vec{a}$ arbitrario è schematizzata in Fig. 1.5. In questo caso il versore della retta è $\vec{a}/a$.

Dunque la proiezione di $\vec{b}$ sulla direzione di $\vec{a}$ si può scrivere come

$$\vec{b} \cdot \left(\frac{\vec{a}}{a}\right) = b \cos\theta_{ab} \quad .$$

Sulla scorta dell'interpretazione geometrica del prodotto scalare, è facile verificare che quest'ultimo gode della proprietà distributiva rispetto alla somma tra vettori, cioè

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad . \tag{1.30}$$

L'equazione (1.30) non esprime altro se non il fatto intuitivo che la proiezione della somma di due vettori su una direzione arbitraria (in questo caso la direzione individuata dal vettore $\vec{c}$) è pari alla somma delle proiezioni dei singoli vettori.

Il prodotto scalare di due vettori è esprimibile in modo semplice in termini delle loro componenti. Si ha

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad , \end{aligned} \tag{1.31}$$

dove si è fatto uso della proprietà distributiva rispetto alla somma del prodotto scalare e delle Eq.ni (1.25).

Esempio 3 – Calcolo dell'angolo formato da due vettori

L'espressione (1.31) permette di calcolare in modo molto semplice l'angolo θ_{ab} formato da due vettori arbitrari $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Dalla definizione di prodotto scalare si ha

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta_{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad ,$$

da cui

$$\cos\theta_{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab} \quad . \tag{1.32}$$

Si voglia ad esempio determinare l'angolo tra i vettori $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \sqrt{2}\,\hat{k}$ e $\vec{b} = \sqrt{2}\,\hat{\imath} - \sqrt{2}\,\hat{\jmath} + 2\,\hat{k}$. Applicando la formula (1.32) si ha

$$\cos\theta_{ab} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{1+1+2}\sqrt{2+2+4}} = \frac{1}{2}$$

da cui si ricava $\theta_{ab} = \pi/3$.

1.6 Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale è un'applicazione matematica che associa a due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ il vettore $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ che ha

- modulo $c = ab\sin\theta_{ab}$

- direzione perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
- verso pari al verso in cui si avviterebbe una vite destrogira che girasse nella direzione della rotazione che porta $\vec{a}$ a coincidere con $\vec{b}$. In alternativa, il verso del vettore $\vec{c}$ può essere determinato con la regola della mano destra. Se il vettore $\vec{a}$ è diretto lungo il dito pollice (dal palmo in fuori) e il vettore $\vec{b}$ è diretto lungo il dito indice, allora il verso del vettore $\vec{c}$ è quello del dito medio.

Si noti come il prodotto vettoriale di due vettori paralleli qualsiasi sia sempre nullo. Si noti inoltre come il prodotto vettoriale sia **non commutativo**, ma cambi di segno invertendo l'ordine dei vettori. Risulta abbastanza intuitivo inoltre dalla definizione che anche il prodotto vettoriale gode della proprietà distributiva, cioè

$$(\vec{a}+\vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c} \quad . \tag{1.33}$$

Una dimostrazione rigorosa di questa proprietà è formulabile in modo semplice per via geometrica, ma non sarà riportata in questa sede.

Come primo esempio, riportiamo qui i prodotti vettoriali dei versori coordinati. Si ha

$$\hat{\imath} \wedge \hat{\imath} = \hat{\jmath} \wedge \hat{\jmath} = \hat{k} \wedge \hat{k} = 0 \tag{1.34}$$

$$\hat{\imath} \wedge \hat{\imath} = \hat{k}, \quad \hat{\imath} \wedge \hat{k} = -\hat{\jmath} \quad \hat{\jmath} \wedge \hat{k} = \hat{\imath} \quad . \tag{1.35}$$

In componenti, il prodotto vettoriale si può calcolare facilmente sfruttando le equazioni (1.34) e la proprietà distributiva rispetto alla somma. Evitando di riportare tutti i calcoli, si trova che il prodotto vettoriale $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ si può esprimere in modo conciso sotto forma di determinante. Si ha

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \wedge (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} \quad . \end{aligned} \tag{1.36}$$

Si noti come la proprietà di cambiare segno del prodotto vettoriale all'inversione dei vettori moltiplicandi, immediatamente conseguente dalla sua definizione, sia trasparente nella ben nota proprietà del determinante di cambiare segno allo scambio di due qualsiasi righe.