Cinematica del punto materiale

11 novembre 2002

1 concetti introduttivi

La cinematica si occupa della descrizione del moto di un corpo indipendentemente dallo studio delle cause che lo determinano.
Si definisce punto materiale in fisica un corpo le cui dimensioni sono trascurabili rispetto alla scala tipica delle lunghezze del problema. Ad esempio, una palla da biliardo può essere considerata un punto materiale se se ne studia il moto di caduta libera da un palazzo alto decine di metri, mentre si deve tenere in considerazione la sua forma se se ne vuol descrivere il moto di rototraslazione su un tavolo da biliardo.
Si dice *traiettoria* la curva "disegnata" nello spazio dal punto materiale nel suo moto. Ad esempio un bimbo su una giostra si muove su una traiettoria circolare, mentre la terra nel suo moto di rivoluzione intorno al sole si muove su una traiettoria ellittica.
Se indichiamo con s la coordinata che misura le distanze lungo la traiettoria (ad esempio gli archi di cerchio descritti dal bambino), la funzione $s(t)$ che associa ad ogni istante t la posizione del punto sulla traiettoria a partire da un punto prefissato (origine) si dice *legge oraria*.
In molti problemi risulta comodo introdurre un sistema di riferimento (SdR) Cartesiano xyz per la misura delle distanze. In tal caso la traiettoria è data, ad esempio, dalla curva $z = z(x, y)$, che associa a ogni punto del piano xy una quota z. In questo caso, la legge oraria può essere specificata semplicemente fornendo la legge oraria di ciascuna coordinata

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

Si noti che nel linguaggio della geometria analitica, la legge oraria (1) altro non è che la traiettoria espressa in forma *parametrica*.

2 Velocità e accelerazione

Il concetto di velocità è legato al concetto intuitivo di rapidità di variazione. In un moto, la velocità è precisamente una misura della rapidità con la quale il punto materiale copre intervalli di distanza Δs sulla traiettoria. Allo stesso modo il concetto di accelerazione 'e legato al concetto intuitivo di rapidità di variazione della rapidità di variazione.

2.1 Moti rettilinei

Consideriamo un punto materiale che si muove lungo una retta e fissiamo l'asse x di un SdR Cartesiano lungo tale direzione.
La velocità media v_m è definita come la rapidità con cui vengono percorsi intervalli Δx in intervalli di tempo finito Δt. In un moto generico, è chiaro che il calcolo della velocità media in finestre temporali diverse dá in generale risultati diversi. Ad esempio se il moto è accelerato, ripetendo la misura della velocità media dopo un certo lasso di tempo, si otterrà un velocità media maggiore. Si definisce velocità media il rapporto

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \quad . \tag{1}$$

Nell'ultimo rapporto si è esplicitato l'istante t_0 dal quale si comincia a misurare la velocità media. Si vede che la velocità media altro non è che il rapporto incrementale della funzione $x(t)$.
Ripetendo la misura a partire da t_0 per intervalli Δt sempre più piccoli, la velocità media tende al limite del rapporto incrementale nel punto t_0. Matematicamente questa operazione definisce la derivata della funzione $x(t)$ nel punto $t = t_0$, mentre fisicamente permette di introdurre il concetto di velocità *istantanea* $v(t)$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \quad . \tag{2}$$

Analogamente si misura l'accelerazione media a_m

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} \quad , \tag{3}$$

definita dunque come il rapporto incrementale della velocità istantanea. E allo stesso modo si parla di accelerazione istantanea come derivata della velocità istantanea

$$a(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} \quad . \tag{4}$$

2.2 Moto in più dimensioni

È chiaro che sia velocità che accelerazione sono grandezze vettoriali, cioè sono caratterizzate da una direzione e un verso, oltre che da un'intensitá (modulo). Ad esempio, se mentre la giostra gira si immagina di eliminare l'ancoraggio del cavalluccio alla giostra, il bambino prosegue il suo moto *per la tangente*. Ciò indica che la sua velocità un attimo prima era *diretta* lungo la tangente alla traiettoria circolare. Quanto lontano viene sbalzato in linea retta il bambino viene intuitivamente legato all'intensitá della velocità. Si tratta in questo caso del modulo del vettore velocità. Specificare direzione, verso e intensità delle velocità a ogni istante t del moto significa disporre del vettore velocità istantanea.
La legge oraria (1) definisce le componenti del *vettore posizione* $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k} \quad . \tag{5}$$

Tale vettore ha un estremo nell'origine degli assi, mentre l'altro segue il punto materiale nel suo moto sulla traiettoria. Il vettore velocità istantanea $\vec{v}$, analogamente al caso di un moto rettilineo, è definito come la derivata del vettore posizione. La derivata di un vettore si definisce in modo analogo alla derivata di una funzione scalare come il limite del rapporto incrementale della funzione vettoriale. In particolare, si ha

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \frac{ds(t)}{dt}\,\hat{u}(t) \quad , \tag{6}$$

dove $ds(t)/dt$ è la derivata della legge oraria $s(t)$, mentre $\hat{u}(t)$ denota il vettore di modulo unitario (versore) tangente alla traiettoria in ogni istante. Per definizione $\hat{u}(t)$, non cambia nel tempo in modulo, mentre può cambiare in direzione (ripensa alla giostra). È chiaro che nel caso di moti rettilinei il versore $\hat{u}(t)$ è costante sia in modulo che in direzione.
Se ci riferiamo a un SdR Cartesiano, la velocità istantanea si scrive nel seguente modo (cfr. espressione (5)

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\,\hat{k} \quad , \tag{7}$$

dove abbiamo introdotto i versori unitari degli assi (costanti nel tempo).
Il modulo della velocità $v = |\vec{v}|$ può essere calcolato da ambedue le formule (6) e (7) e risulta

$$|\vec{v}| = \frac{ds(t)}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} \quad . \tag{8}$$

Il vettore accelerazione $\vec{a}$ è definito come derivata del vettore velocità istantanea. Si ha dunque

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)}{\Delta t} = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}\,\hat{u}(t) + \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2 \hat{n}(t) \quad , \tag{9}$$

dove si è introdotto il raggio di curvatura della traiettoria ρ (cioè il raggio della circonferenza che meglio approssima localmente la traiettoria) e il versore *normale* $\hat{n}(t)$ (cioè perpendicolare al versore tangente $\hat{u}(t)$ a ogni istante)
In cinematica è consuetudine indicare le derivate rispetto al tempo con un puntino sopra la funzione, uno per ogni operazione di derivazione. In tal modo la derivata prima $dx(t)/dt$ diventa $\dot{x}(t)$ e la derivata seconda $d^2x(t)/dt^2$ diventa $\ddot{x}(t)$.

3 Moti rettilinei

Riassumiamo i concetti più importanti riguardanti i moti rettilinei

3.1 Moto rettilineo uniforme

Un punto materiale in moto rettilineo uniforme copre spazi uguali in tempi uguali. Fissiamo l'asse x lungo la direzione di moto con il verso positivo nel senso di marcia del punto materiale.

La legge oraria, la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea sono date dalle relazioni

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v(t - t_0) \\ v(t) = v \\ a(t) = 0 \quad , \end{cases} \tag{10}$$

dove $x(0)$ è la posizione del punto materiale all'istante iniziale $t = t_0$ e v è la velocità costante.

3.2 Moto uniformemente accelerato

In un moto uniformemente accelerato la velocità subisce variazioni uguali in tempi uguali. Fissiamo l'asse x lungo la direzione di moto con il verso positivo nel senso di marcia del punto materiale. La legge oraria, la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea sono date dalle relazioni

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \\ v(t) = v_0 + a(t - t_0) \\ a(t) = a \quad , \end{cases} \tag{11}$$

dove $x(0)$ e v_0 sono la posizione e la velocità del punto materiale all'istante iniziale $t = t_0$, e a è l'accelerazione costante.
Il moto di caduta dei gravi è descritto dalle equazioni (11) con $a = g \approx 9.8$ m/s^2 se l'asse x è diretto verso il basso, con $a = -g \approx -9.8$ m/s^2 se l'asse x è diretto verso l'alto.

4 Moti curvilinei

Riassumiamo i concetti più importanti riguardanti alcuni moti curvilinei particolari

4.1 Moto circolare uniforme

La traiettoria nel moto circolare è un circonferenza. Se il punto materiale si muove su una circonferenza di raggio R in modo da percorrere archi uguali in tempi uguali, il moto si dice *circolare uniforme.* Ciò significa che, ponendo l'origine degli assi nel centro della circonferenza, il vettore posizione ruota di angoli uguali in tempi uguali. In coordinate cartesiane si ha (vedi Fig. 1)

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) \\ y(t) = R\sin\theta(t) \quad . \end{cases} \tag{12}$$

Se il punto percorre archi di circonferenza uguali Δs in tempi uguali, il modulo v della sua velocità tangenziale $v = \Delta s/\Delta t$ è costante. Si ha

$$\Delta s = R\Delta\theta$$

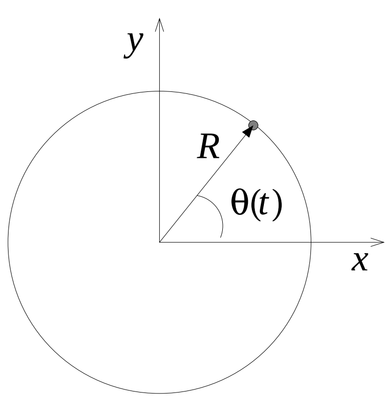


Figura 1:

quindi

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\, R$$

La quantità $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ è costante e si chiama *velocità angolare*. Si misura in rad/s.
In analogia con il moto rettilineo, si parla in generale di velocità angolare istantanea come derivata della funzione $\theta(t)$

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \tag{13}$$

Nel moto uniforme la legge oraria per gli spostamenti angolari risulta

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0) \quad , \tag{14}$$

dove θ_0 rappresenta l'angolo formato dal vettore posizione del punto materiale al tempo iniziale $t = t_0$.
Dato che il versore tangente $\hat{u}$ non è costante in direzione, l'accelerazione è diversa da zero anche se il moto è uniforme. Si ricorda che questa è una conseguenza diretta del fatto che la traiettoria e' curvilinea. Ricordando la formula (9), si vede che l'unica componente non nulla è quella normale (diretta verso il centro della circonferenza), dato che la derivata seconda $\ddot{s}(t)$ è nulla (il moto sulla traiettoria è uniforme). Si ha

$$\vec{a} = \left(\frac{v^2}{R}\right)\, \hat{n} \quad .$$

L'accelerazione vale dunque $v^2/R = \omega^2 R$ ed è diretta istante per istante lungo il raggio verso il centro della circonferenza (accelerazione centripeta).

4.2 Moto circolare uniformemente accelerato

In analogia al moto rettilineo uniformemente accelerato, nel moto circolare uniformemente accelerato la velocità angolare aumenta linearmente nel tempo, mentre gli spostamenti angolari aumentano con il quadrato del tempo. Si ha

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \\ \omega(t) = \dot{\theta}(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \\ \ddot{\theta}(t) = \alpha \quad , \end{cases}$$

dove $\alpha = cost.$ è l'accelerazione angolare e ω_0 è la velocità angolare al tempo iniziale $t = t_0$.
La velocità tangenziale è data da

$$\vec{v} = \dot{s}(t)\, \hat{u} = [\dot{\theta(t)R}]\, \hat{u} = [\omega(t)R]\, \hat{u} \tag{15}$$

dove abbiamo usato la definizione del vettore velocità istantanea (6) e la semplice relazione che lega archi e angoli $s = \theta R$. Si noti che il fatto che la velocità tangenziale ha modulo variabile nel tempo (a differenza del moto circolare uniforme) fà si che il vettore accelerazione abbia una componente tangenziale non nulla (si veda la formula (9)). Si tratta delle componente costante

$$\ddot{s}(t)\,\hat{u} = [\ddot{\theta}(t)R]\,\hat{u} = [\alpha R]\,\hat{u} \quad .$$

Si noti che se il ,moto angolare è accelerato, l'accelerazione centripeta non è più costante. In particolare si ha

$$a_c(t) = \left[\frac{v^2(t)}{R}\right] = \omega^2(t)\,R \quad .$$

5 Moto parabolico

Il moto parabolico in due dimensioni si ottiene componendo un moto uniformemente accelerato con un moto uniforme. Un esempio tipico è il moto balistico. In direzione verticale l'accelerazione è costante e pari all'accelerazione di gravità $g \approx 9.8$ m/s^2. In direzione orizzontale la velocità è costante (non ci sono forze) e pari alla componente orizzontale della velocità iniziale.

5.1 Lancio di un proiettile dal suolo

Supponiamo di voler descrivere il moto balistico di un oggetto lanciato dal suolo. Scegliamo un riferimento Cartesiano bidimensionale come in figura 2 (a), con l'origine degli assi nella posizione iniziale del punto materiale, l'asse y diretto verso l'alto e l'asse x diretto nella direzione di lancio. Sia $\vec{v}_0 = v_0[\cos\alpha\,\hat{i} + \sin\alpha\,\hat{j}]$ il vettore velocità iniziale. Abbiamo esplicitamente indicato con v_0 il modulo del vettore $\vec{v}_0$. La legge oraria si scompone nel seguente modo

$$\begin{cases} x(t) = [v_0\cos\alpha]\,t \\ y(t) = [v_0\sin\alpha]\,t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad ,$$

mentre per le velocità si ha

$$\begin{cases} v_x(t) = \dot{x}(t) = v_0\cos\alpha \\ v_y(t) = \dot{y}(t) = v_0\sin\alpha - gt \end{cases} \quad .$$

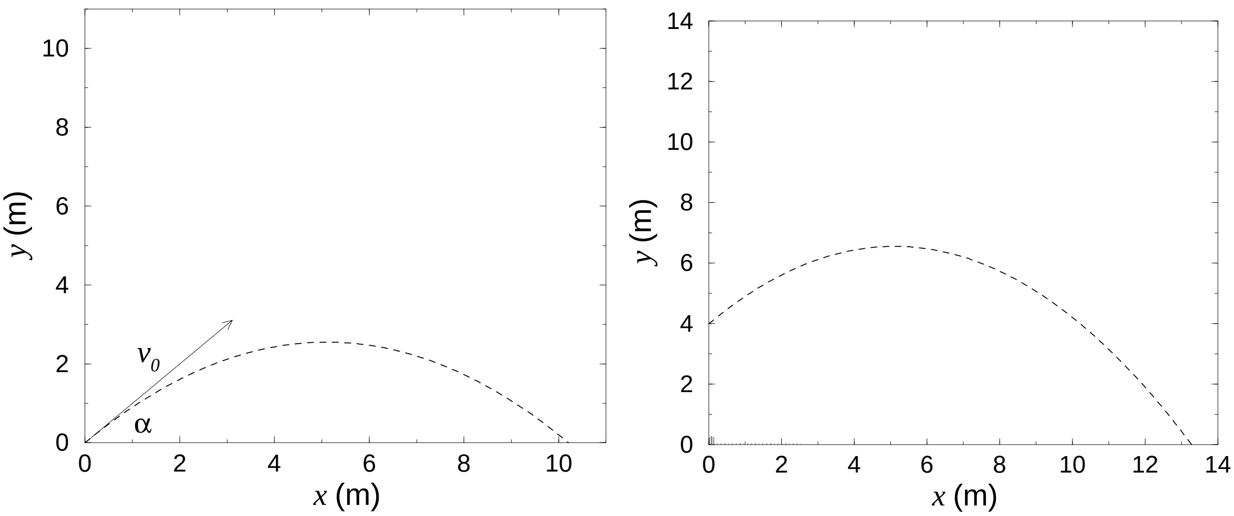
Ricavando t in funzione di x dalla prima equazione del sistema (5.1) si ottiene

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha} \quad .$$

Sostituendo questa equazione nella seconda delle (5.1) si ottiene la traiettoria nel piano xy

$$y = -\left[\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right]x^2 + [\tan\alpha]\,x \quad . \tag{16}$$

L'altezza massima raggiunta dal corpo materiale si può ottenere in diversi modi. Il modo più



(a)

Tralasciando la soluzione banale $t_M = 0$ (è ovvio che il punto ha quota zero al momento del lancio!), ponendo la parentesi quadra uguale a zero si ottiene

$$t_M = \left(\frac{2v_0}{g}\right) \sin\alpha \quad . \tag{19}$$

Si noti che $t_M = 2t_V$. Questa conclusione è ovvia data la simmetria assiale della parabola: la seconda metà del moto è identica alla prima, a patto di cambiare di segno la componente verticale della velocità. In particolare, il tempo necessario per coprire due intervalli orizzontali o verticali uguali e simmetrici rispetto all'asse della parabola sono identici. Sostituendo il valore appena calcolato di t_M nella prima delle (5.1) si ottiene

$$x_M = \left(\frac{v_0^2}{g}\right) \sin 2\alpha \quad , \tag{20}$$

dove si è usata l'identità trigonometrica $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Come si vede, il valore massimo della gittata di un oggetto lanciato dal suolo corrisponde a un angolo $\alpha = \pi/4$, indipendentemente dal valore di v_0. Notiamo che il calcolo di x_M poteva essere svolto direttamente senza passare per il dominio temporale imponendo la condizione $y(x_M) = 0$ direttamente nell'equazione (16) che descrive la traiettoria.

5.2 Lancio di un proiettile dalla sommità di un edificio

Supponiamo di voler descrivere il moto balistico di un oggetto lanciato da una certa altezza h, per esempio un sasso scagliato dall'alto di una torre. Scegliamo un riferimento Cartesiano bidimensionale come in figura 2 (b), con l'origine degli assi alla base della torre. In tal caso si ha $y(t = 0) = h$. Dunque la scomposizione della legge oraria assume in questo caso la forma

$$\begin{cases} x(t) = [v_0 \cos\alpha]\, t \\ y(t) = h + [v_0 \sin\alpha]\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad ,$$

mentre per le velocità si ha ancora

$$\begin{cases} v_x(t) = \dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = \dot{y}(t) = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases} \quad .$$

La traiettoria si ottiene di nuovo eliminando il tempo dal sistema (5.2). In modo del tutto analogo al caso precedente si ottiene

$$y = -\left[\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right] x^2 + [\tan\alpha]\, x + h \quad . \tag{21}$$

È chiaro che l'altezza massima raggiunta dal corpo materiale in questo caso si ottiene semplicemente aggiungendo l'altezza della torre all'espressione (18). Si ha dunque

$$y_V = h + \left(\frac{v_0^2}{2g}\right) \sin^2\alpha \quad . \tag{22}$$

Il calcolo della gittata è identico al caso precedente, anche se più laborioso. È conveniente svolgere i conti imponendo la condizione di quota nulla direttamente nell'equazione della traiettoria (21). Tale condizione si scrive $y(x_M) = 0$. Si ha

$$- \left[\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right] x_M^2 + [\tan \alpha] \; x_M + h = 0$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado. Si ha

$$x_M = \frac{\tan \alpha \pm \sqrt{\tan^2 \alpha + \dfrac{2h}{v_0^2 \cos^2 \alpha}}}{g / v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Possiamo mettere in evidenza un fattore $\tan \alpha$. Si ottiene

$$x_M = \left(\frac{v_0^2}{g} \right) \tan \alpha \cos^2 \alpha \left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{2h}{v_0^2 \sin^2 \alpha}} \right] \quad .$$

Usando la definizione di tangente $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ e ricordando che $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, si ha infine

$$x_M = \left(\frac{v_0^2}{g} \right) \sin 2\alpha \left[\frac{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2h}{v_0^2 \sin^2 \alpha}}}{2} \right] \quad . \tag{23}$$

Abbiamo scelto il segno + poiché per $h = 0$ (lancio dal livello del suolo) l'espressione di x_M (23) deve essere identica alla (20).
Il calcolo degli intervalli di tempo notevoli t_V e t_M procede come nel caso precedente. In particolare t_V è soluzione dell'equazione $v_y(t_V) = 0$ e dunque la soluzione è sempre data dall'espressione (17). Il tempo t_M necessario per toccare il suolo si ricava risolvendo l'equazione di secondo grado $y(t_M) = 0$. Si noti che in questo caso non si ha più $t_M = 2t_V$! Perchè? La soluzione si ottiene con passaggi affatto simili a quelli appena descritti per il calcolo di x_M. Il risultato finale è

$$t_M = \left(\frac{2v_0}{g} \right) \sin \alpha \left[\frac{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \alpha}}}{2} \right] \quad . \tag{24}$$

La scelta del segno proviene ancora una volta dalla considerazione che t_M deve essere dato dall'espressione (19) per $h = 0$.