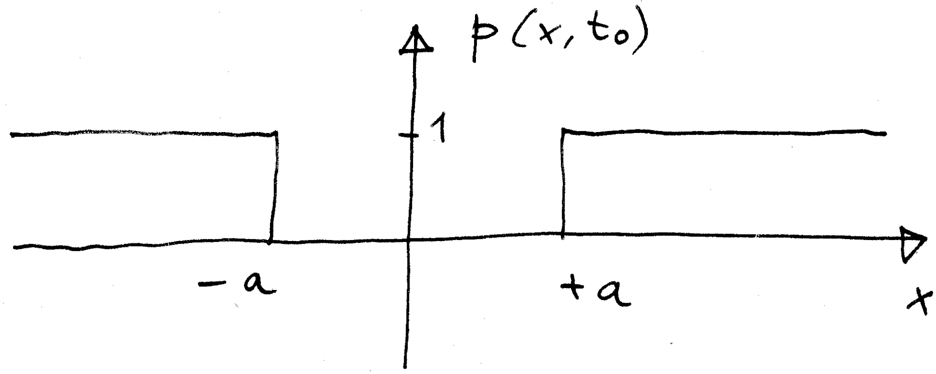
Série 9

La distribution de probabilité des proteins marquée avec le chromophore est le fonctionne inconnue.

Au temps $t = t_0$



$$p(x,t_0) = \begin{cases} 0 & x \in [-a, a] \\ 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

donc $$p(x,t_0) = \theta(x-a) + \theta(-x-a) \qquad (1)$$

Nous avons un problem de diffusion sans champs de forces, donc :

$$p(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(x,t \mid x_0,t_0)\, p(x_0,t_0)\, dx_0$$

où $$\mathbb{P}(x,t \mid x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t-t_0)}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}}$$

(D = coefficient de diffusion des protéines sur la membrane)

En utilisant la fonctionne (1).
on peut écrire :

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} \left[\int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}}\, dx_0 + \right.$$
$$\left. + \int_{a}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}}\, dx_0 \right]$$

$$\frac{x-x_0}{\sqrt{4D(t-t_0)}} = y \quad \Rightarrow$$

$$p(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{+\infty}^{(x+a)/\sqrt{4D(t-t_0)}} e^{-y^2}\, dy \; - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(x-a)/\sqrt{4D(t-t_0)}}^{-\infty} e^{-y^2}\, dy \; =$$

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(x+a)/\sqrt{4D(t-t_0)}}^{+\infty} e^{-y^2} dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{(x-a)/\sqrt{4D(t-t_0)}} e^{-y^2} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy^2 - \int_0^{(x+a)/\sqrt{4D(t-t_0)}} e^{-y^2} dy \right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{-y^2} dy - \int_{(x-a)/\sqrt{4D(t-t_0)}}^{0} e^{-y^2} dy \right] =$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \mathrm{erf}\left(\frac{x+a}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \right) \right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} + \mathrm{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \right) \right]$$

$$\boxed{p(x,t) = 1 + \frac{1}{2} \left[\mathrm{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \right) - \mathrm{erf}\left(\frac{x+a}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \right) \right]}$$

La fonctionne ci-dessus est dessiné in Fig. 1 pour $D = 1/4$ $a = 1$, et $t - t_0 = (0.1, 0.3, 0.7)$

$\left(\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \right)$

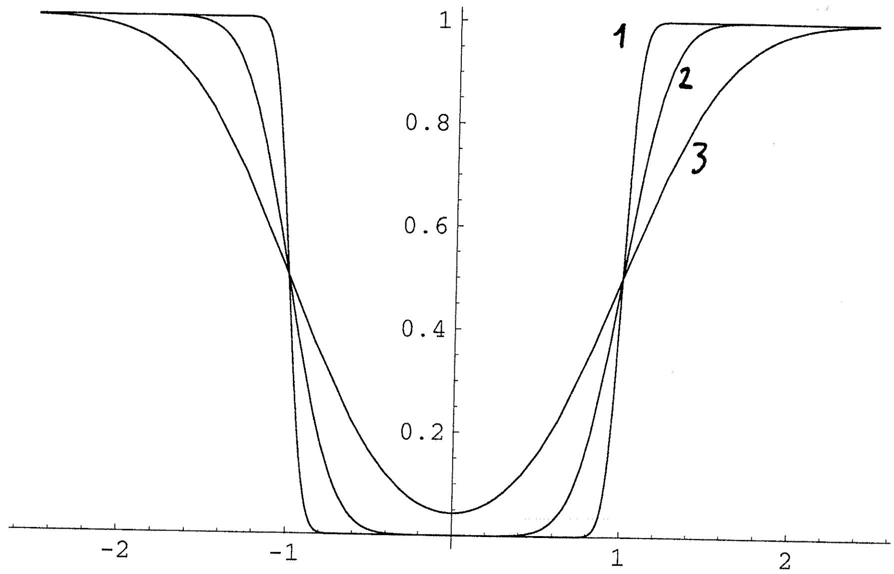


Fig. 1

$$\begin{cases} 1 \rightarrow & \Delta t = 0{,}1 \\ 2 \rightarrow & \Delta t = 0{,}3 \\ 3 \rightarrow & \Delta t = 0{,}7 \end{cases}$$

C'est clair que $\lim_{t \to \infty} p(x,t) = 1$

Le nombre de proteins qui ont diffusé dans la region $R \equiv [-a, a]$ au temps t serait

$$N(t) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} p(x,t)\, dx$$

où le facteur de normalisation a eté mis pour assurer que $\lim_{t \to \infty} N(t) = 1$.

pour calculer $N(t)$, on a besoin de l'intégral de la fonction erf(x). Cela peut être calculé sans effort avec un petit truc.

$$\int \mathrm{erf}(x)\,dx = \int \left[\frac{d}{dx}(x)\right] \mathrm{erf}(x)\,dx = \left(\begin{array}{c}\text{par}\\ \text{parties}\end{array}\right)$$

$$= x\,\mathrm{erf}(x) - \int x \left[\frac{d}{dx}(\mathrm{erf}(x))\right] =$$

$$= x\,\mathrm{erf}(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int x e^{-x^2} dx =$$

$$= x\,\mathrm{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

Donc:

$$N(t) = \frac{1}{2a}\left[2a + \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a} \mathrm{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4D(t-t_0)}}\right)dx - \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a} \mathrm{erf}\left(\frac{x+a}{\sqrt{4D(t-t_0)}}\right)dx\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2a}\sqrt{4D(t-t_0)} \int_{-\frac{2a}{\sqrt{4D(t-t_0)}}}^{0} \mathrm{erf}(y)\, dy \; +$$

$$- \frac{1}{2a}\sqrt{4D(t-t_0)} \int_{0}^{2a/\sqrt{4D(t-t_0)}} \mathrm{erf}(y)\, dy =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{D(t-t_0)}}{a} \left\{ \left[y\, \mathrm{erf}(y) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} \right]_{-2a/\sqrt{4D(t-t_0)}}^{0} + \right.$$

$$\left. - \left[y\, \mathrm{erf}(y) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} \right]_{0}^{2a/\sqrt{4D(t-t_0)}} \right\} =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{D(t-t_0)}}{a} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{2a}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \mathrm{erf}\left(-\frac{2a}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \right) + \right.$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{4a^2}{4D(t-t_0)} \right] +$$

$$- \frac{2a}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \mathrm{erf}\left(\frac{2a}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \right) +$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{4a^2}{4D(t-t_0)} \right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right\} =$$

$$N(t) = 1 + \frac{\sqrt{D(t-t_0)}}{a\sqrt{\pi}}\left(1 - e^{-a^2/D(t-t_0)}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{D(t-t_0)}}\right)$$

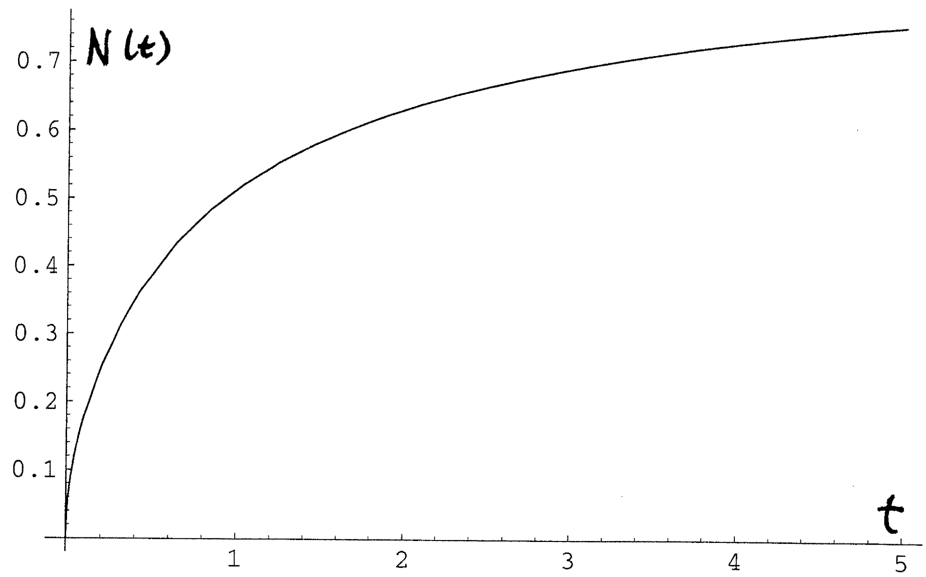


Fig 2

La fonctione $N(t)$ est montrée in Fig. 2 pour $D = 1/4$, $a = 1$, $t_0 = 0$

Le point est que $N(t)$ est proportionelle a l'intensité de la radiation de fluorescence qu'on peut mesurer. Donc on peut mesurer combien de temps il faut pour reobtenir la moitié de la radiation (HALF-RECOVERY TIME) t_H.

Donc

$$N(t_H) = 1/2$$

si on definie $\xi = \dfrac{a}{\sqrt{D(t-t_0)}}$,

on peut resoudre l'équation

$$1 + \frac{1}{\xi_H\sqrt{\pi}}\left(1 - e^{-\xi_H^2}\right) - \mathrm{erf}(\xi_H) = \frac{1}{2}$$

dont $\xi_H \approx 1.0397$

Donc, si Δt_H est le temps mesuré par l'experimet $\Rightarrow$

$D = \dfrac{a^2}{\xi_H^2 \Delta t_H}$	$\xi_H = 1.0397$