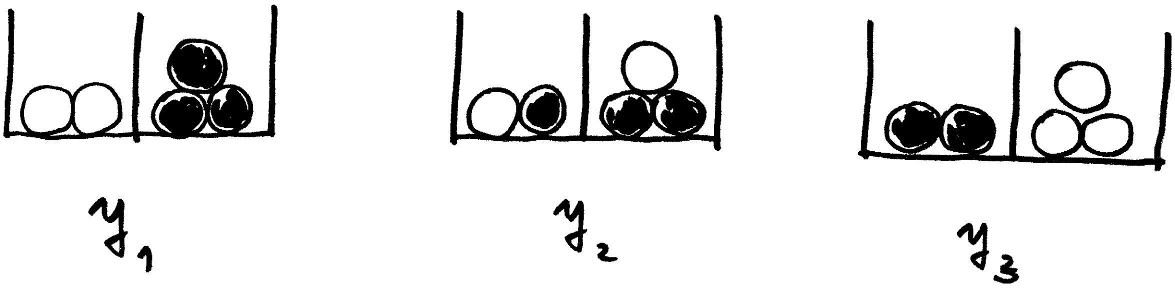
Série 4 - Corrigés



1) La matrice de transition

Je veux calculer par exemple la probabilité de la transition $2 \rightarrow 3$:
Je peux prendre la blanche a gauche avec prob. $1/2$ e une des deux noires a droite avec prob. $2/3$. Donc

$$Q_{32} = p(3, s+1 \mid 2, s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

On peut calculer les autres éléments de la matrice Q de façon similaire.
Le résultat est :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ 1 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

<u>ATT.</u>

La matrice Q doit toujours respecter la contrainte

$$\sum_n Q_{nm} = 1 \quad \forall\ m$$

ce que veut dire que on doit avoir prob. 1 d'arriver dans quelque endroit ! En partant de n'emporte quel état.

On veut etablir si la matrice Q est régulière. Pour cela on calcule

$$\left[Q^2\right]_{nm} = \sum_{m'} Q_{nm'} Q_{m'm} = (\cdots) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{23}{36} & \frac{20}{36} \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{36} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On voit que :

1) $\sum_n [Q^2]_{nm} = 1 \quad \forall\ m$

donc Q était bien calculé (elle doit être encore une bonne matrice d'évolution)

2) $[Q^2]_{nm} \neq 0 \quad \forall\ n, m.$

Cela veut dire que chaque état est "en contact" avec tous les autres.(*) Donc le système est bien ERGODIQUE $\Longrightarrow$ L'état stationnaire est UNIQUE.

Pour le calculer, on exploit la décomposition spectrale de la matrice Q.

(*) Depuis le deuxième pas du processus

Decomposition spectrale

La matrice Q n'est pas symmetrique, donc elle aura deux "set" de vecteurs propres, ceux de gauche et ceux de droite :

$$\begin{cases} \lambda_k \psi^R_n(k) = \sum_m Q_{nm} \psi^R_m(k) & (1) \ (\underline{R}ight) \\ \psi^L_n(k) \lambda_k = \sum_m \psi^L_m(k) Q_{mn} & (2) \ (\underline{L}eft) \end{cases}$$

où $\{\lambda_k\}$ sont les valeurs propres.
En général $|\lambda_k| \leq 1 \ \forall k$. Les valeurs propres $\lambda_k = 1$ sont associées aux états stationnaires. Si Q est régulière, on n'a que <u>une</u> val. propre egale a 1 (état stat. unique).
C'est facile de voir que le vecteur

propre associé à la val. propre $\lambda_{\bar{k}} = 1$

$$\psi^L_n(\bar{k}) = 1 \quad \forall n \qquad (3)$$

est une solution de l'équation (2), (cela vient de la propr. générale des matrices de transition $\sum_n Q_{nm} = 1, \forall m$).

En cas de processus ergodique, l'état (3) est le seul vecteur propre gauche associé à $\lambda_{\bar{k}} = 1$.

Grâce à l'introduction des vecteurs propres (1) et (2), on peut décomposer la matrice Q de la façon suivante :

$$Q_{nm} = \sum_k \lambda_k \psi^R_n(k)\, \psi^L_m(k)$$

(4) $$= \psi^R_n(\bar{k})\, \psi^L_m(\bar{k}) + \sum_{k \neq \bar{k}} \lambda_k \psi^R_n(k)\, \psi^L_m(k)$$

On peut iterer l'expression (4) pour obtenir la matrice de transition au s-ème pas du processus :

$$[Q^s]_{nm} = \sum_k \lambda_k^s \psi_n^R(k)\, \psi_m^L(k) =$$

$$= \psi_n^R(\bar{k})\, \psi_m^L(\bar{k}) + \sum_{k \neq \bar{k}} \lambda_k^s \psi_n^R(k)\, \psi_m^L(k)$$

En rappellant que $\psi_m^L(\bar{k}) = 1 \quad \forall\, m$
et que $|\lambda_k| < 1 \quad \forall\, k \neq \bar{k} \implies$

$$\boxed{\lim_{s \to \infty} [Q^s]_{nm} = \psi_n^R(\bar{k})} \qquad (5)$$

cela veut dire que la matrice Q asymptotique dans un processus ergodique est tout simplement donné par une matrice dont toutes les colonnes sont égales au vecteur propre de droite associé à la valeur propre $\lambda_{\overline{K}} = 1$.

<u>Les valeurs propres de Q</u>

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 18\lambda^3 - 15\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \qquad (6)$$

Mais on sait que $\lambda_{\overline{K}} = 1$ est une solution de l'équation charactéristique. Donc on peut utiliser la règle de Ruffini pour decomposer le polynome (6)

	18	−15	−4	1
1		18	3	−1
	18	3	−1	0

on obtient :

$$(18\lambda^2 + 3\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$$

dont

$$\lambda = (1, -1/3, 1/6)$$

Maintenant il suffit de calculer

$$\psi_n^R(\bar{k}).$$

L'équation à résoudre est

$$\psi_n^R(\bar{k}) = \sum_m Q_{nm} \psi_m^R(\bar{k})$$

avec la contrainte $\sum_m \psi_m^R(\bar{k}) = 1$
(cela vient de l'égalité (5))

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ 1 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6x \\ z = 3x \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \psi^R_{(\bar{k})} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 6/10 \\ 3/10 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$Q^\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 1/10 \\ 6/10 & 6/10 & 6/10 \\ 3/10 & 3/10 & 3/10 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

En particulier, si on commence avec des probabilités initiales

$$\vec{p}(0) = (1, 0, 0),$$

L'état stationnaire est

$$\vec{p}^{(\infty)} = Q^\infty \vec{p}(0) = \left(\frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{3}{10}\right)$$