Série 7

① Le facteur de normalization $\mathcal{N}$.

La condition à imposer c'est

$$\int \cdots \int \prod_{k=1}^{N} dx_k \; P(\vec{x}) = 1$$

dont

$$\mathcal{N} = \left[\int \cdots \int \prod_{k=1}^{N} dx_k \, \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{ij} x_i A_{ij} x_j \right) \right]^{-1} \qquad (1)$$

La matrice A est réelle et symmetrique, donc on peut trouver une matrice O orthogonale, telle que

$$A = O^{-1} \Lambda O = O^{T} \Lambda O \qquad (2)$$

où $\Lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, $\{\lambda\}$ valeurs propres de A

En faisant le changement de variable

$$\begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^{N} O_{ij}\, y_j \\ \det(J) = \det\left[\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}}\right] = \det[O] = 1 \end{cases} \qquad (3)$$

nous obtenons, en tenant compte de (2) et (3)

$$\int \cdots \int \prod_{k=1}^{N} dx_k \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{ij} x_i A_{ij} x_j\right] =$$

$$= \int \cdots \int \prod_{k=1}^{N} dy_k \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{ij} y_i \Lambda_{ij} y_j\right] =$$

$$= \prod_{k=1}^{N} \int dy_k\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_k y_k^2} =$$

$$= \prod_{k=1}^{N} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_k}} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\prod_{k=1}^{N}\lambda_k}} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{|\det A|}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{N} = \frac{\sqrt{|\det A|}}{(2\pi)^{N/2}}$$

② Les elements de la matrice de covariance

$$\langle x_i x_j \rangle = \frac{\sqrt{|\det A|}}{(2\pi)^{N/2}} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{N} dx_k \, (x_i x_j) \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{mn} x_m A_{mn} x_n\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i = \sum_s O_{is} y_s \\ x_j = \sum_t O_{jt} y_t \end{cases} \Rightarrow \left(\det(J) = 1\right)$$

en faisant le même changement de variable qu'avant, nous obtenons :

$$\langle x_i x_j \rangle = \frac{\sqrt{|\det A|}}{(2\pi)^{N/2}} \times$$

$$\times \int \cdots \int \prod_{k=1}^{N} dy_k \underbrace{\left(\sum_s O_{is} y_s\right)\left(\sum_t O_{jt} y_t\right)}_{P} e^{-\frac{1}{2} \sum_{mn} y_m \Lambda_{mn} y_n}$$

$$= \frac{\sqrt{|\det A|}}{(2\pi)^{N/2}} \times$$

$$\times \int \cdots \int \prod_{k=1}^{N} dy_k \left(\sum_s y_s^2 O_{is} O_{js}\right) e^{-\frac{1}{2} \sum_{mn} y_m \Lambda_{mn} y_n}$$

car ne donnent une contribution a l'intégration que les termes quadratiques en y. Donc

$$\langle x_i x_j \rangle = \sum_{s=1}^{N} \frac{\sqrt{|\det A|}}{(2\pi)^{N/2}} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{N} dy_k \left(O_{is} O_{js}\, y_s^2 \right) e^{-\sum_m \frac{\lambda_m y_m^2}{2}}$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{N} dy_k \left(O_{is} O_{js}\, y_s^2 \right) \sqrt{\frac{\lambda_k}{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2} \sum_m \lambda_m y_m^2}$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \int dy_s \left(O_{is} O_{js}\, y_s^2 \right) \sqrt{\frac{\lambda_s}{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2} \lambda_s y_s^2}$$

$$= \sum_{s=1}^{N} O_{is} O_{js} \sqrt{\frac{\lambda_s}{2\pi}} \left[\int y_s^2 e^{-\frac{1}{2} \lambda_s y_s^2} \right] =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} O_{is} O_{js} \sqrt{\frac{\lambda_s}{2\pi}} \left(\frac{2}{\lambda_s} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \sum_{s=1}^{N} O_{is} \left(\frac{1}{\lambda_s} \right) O_{js} =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} O_{is} \left(\frac{1}{\lambda_s} \right) O_{sj}^{T} = \left(O \Lambda^{-1} O^{T} \right)_{ij} = \left(A^{-1} \right)_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle x_i x_j \rangle = \left(A^{-1} \right)_{ij}}$$