SÉRIE 3 — CORRIGÉS

On écrit le lois de conservation de l'impulsion totale e de l'énergie cinétique totale :

$$m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \qquad (2)$$

Je veux exprimer $\Delta \vec{v}_2 = \vec{v}_{2f} - \vec{v}_{20}$ en fonction de $\vec{v}_{10}$ et $\vec{v}_{20}$.
De l'équation (2) on obtient :

$$m_2 (v_{2f}^2 - v_{20}^2) = - m_1 (v_{1f}^2 - v_{10}^2)$$

$$m_2 (\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{20}) \cdot (\vec{v}_{2f} + \vec{v}_{20}) = - m_1 (\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{10}) \cdot (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{10}) \qquad (3)$$

mais de l'équation (1)

$$m_2 (\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{20}) = - m_1 (\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{10})$$

donc l'équation (3) devient :

$$\vec{v}_{2f} + \vec{v}_{20} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{10}$$

Je me debarasse de $\vec{v}_{1f}$ en utilisant l'équation (1) encore une fois :

$$\begin{cases} \vec{v}_{2f} + \vec{v}_{20} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{10} \\ \vec{v}_{2f} - \vec{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_2}\left(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{10}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_{2f} - \vec{v}_{20} =$$

$$= -\frac{m_1}{m_2}\left(\vec{v}_{2f} + \vec{v}_{20} - 2\vec{v}_{10}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{v}_{2f}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) - \vec{v}_{20}\left(1-\frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{2m_1}{m_2}\,\vec{v}_{10}$$

Je soustrais $-2\vec{v}_{20}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$ des deux côtées et obtiens ;

$$\Delta \vec{v}_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20})$$

Si Δt est la durée de la collision :

$$\boxed{m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} = -\left(\frac{2\mu}{\Delta t}\right) \vec{v}_{20} + \left(\frac{2\mu}{\Delta t}\right) \vec{v}_{10}} \quad \boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

$$\Rightarrow \gamma = 2\mu / \Delta t \qquad (4)$$

Donc, on a obtenu une équation de la même structure de l'équation de Langevin, en n'utilisant que une collision élastique. On voit que le deux termes qui decrivent l'amortissement $\left(-\frac{2\mu}{\Delta t} \vec{v}_{20}\right)$ et le forces aléatoires ont la même origine.

En plus, on peut voire que le theorème de fluctuation - dissipation est verifié :

Si on fait l'approximation de particule Brownienne ($m_1 \ll m_2 \Rightarrow \mu \approx m_1$)

on a

$$\langle \vec{v}_{10}(t) \cdot \vec{v}_{10}(t+t') \rangle = \begin{cases} \dfrac{kT}{m_1} & t' < \Delta t \\ 0 & t' > \Delta t \end{cases}$$

puisque le particules sont distribuée selon la loi de Maxwell.

Donc si on considere la fonction d'autoc. des forces aléatoires :

$$\langle \vec{f}_s(t) \cdot \vec{f}_s(t+t') \rangle =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4 m_1^2}{\Delta t^2} \dfrac{kT}{m_1} & t' < \Delta t \\ 0 & t' > \Delta t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (2\gamma kT) \dfrac{1}{\Delta t} & t' < \Delta t \\ 0 & t' > \Delta t \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\Delta t \to 0']{} 2\gamma kT \, \delta(t-t')$$

mais on a utilisé l'expression $\gamma = \frac{2 m_1}{\Delta t}$

Donc on voit que la fonction d'autocorrelation des forces aléatoires a la forme correcte, mais seulement avec un γ qui diverge !

Solution : on doit prendre γ d'une autre theorie qui ne soit pas celui des collisions microscopics. Justement, on le prendre de l'hydrodynamique et ça marche. Mais si on essaye de formuler la theorie de Langevin a partir des collisions on voit que il y a des problèmes.