Équation de Langevin en presence d'une force harmonique

On doit resoudre l'équation suivante

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -\left(\dfrac{\gamma}{m}\right)v - \omega_0^2 x + \dfrac{\xi(t)}{m} \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} = v(t) \end{cases} \qquad (1)$$

où $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ est la frequence charactéristique de l'oscillation harmonique, $\xi(t)$ la force aléatoire et γ le coefficient d'amortissement.

En passant aux transformées de Laplace, on obtient :

$$\begin{cases} s\bar{v} - v_0 + \left(\dfrac{\gamma}{m}\right)\bar{v} + \omega_0^2\,\bar{x} = \dfrac{\bar{\xi}}{m} \\[2ex] s\bar{x} - x_0 = \bar{v} \end{cases} \qquad (2)$$

où

$$\bar{v} = \mathcal{L}(v)[s] = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, v(t)\, dt$$

$$\bar{x} = \mathcal{L}(x)[s] = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, x(t)\, dt$$

$$\bar{\xi} = \mathcal{L}(\xi)[s] = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, \xi(t)\, dt$$

et on a utilisé la propriété :

$$\overline{\frac{d^n f}{dt^n}} = s^n \bar{f} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} - \dots - s \left.\frac{d^{n-2}f}{dt^{n-2}}\right|_{t=0} - \left.\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$$

avec les conditiones initiales $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.
Donc, on a

$$\bar{v} = \frac{s v_0 + \omega_0^2 x_0}{s^2 + \left(\frac{\gamma}{m}\right) s + \omega_0^2} + \left(\frac{s}{s^2 + \left(\frac{\gamma}{m}\right) s + \omega_0^2} \right) \frac{\bar{\xi}(s)}{m} \qquad (3)$$

On peut encore simplifier l'expression (3) en resoudant les binomies du deuxième degré :

$$s^2 + \left(\frac{\gamma}{m}\right) s + \omega_0^2 = (s - s_1)(s - s_2)$$

avec $\begin{cases} s_1 = -(\Gamma - \Delta) \\ s_2 = -(\Gamma + \Delta) \end{cases}$ et $\begin{cases} \Gamma = \dfrac{\gamma}{2m} \\ \Delta = \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} \end{cases}$

On obtient

$$\bar{v} = \frac{s v_0 + \omega_0^2 x_0}{(s - s_1)(s - s_2)} + \left(\frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)} \right) \frac{\bar{\xi}(s)}{m} \qquad (4)$$

Le premier terme de l'équation (4) peut être mis sous la forme suivante :

$$\frac{s v_0 + \omega_0^2 x_0}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} \qquad (4\text{-bis})$$

et le constantes c_1 et c_2 satisferont les equations :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = v_0 \\ C_1 s_2 + C_2 s_1 = -\omega_0^2 x_0 \end{cases} \qquad (5)$$

En rappellant que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\alpha}\right] = e^{\alpha t}$$

et en resoudrant le système (5), on peut ecrire l'anti-transformé du premier terme dans l'équation (4) :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2}\right] = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} = (\dots)$$

$$= v_0 e^{-\Gamma t} C(t) - \frac{\omega_0^2 x_0}{\Delta} \sinh(\Delta t) \qquad (6)$$

où $C(t) = \cosh(\Delta t) - \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right) \sinh(\Delta t)$

Pour calculer la transformé inverse du deuxième terme dans l'équation (4), il faut se rappeler de la propriété suivante de la transformé de Laplace :

$$\mathcal{L}^{-1}[f_1(s)\, f_2(s)] = \int_0^t F_1(t-t')\, F_2(t')\, dt'$$

où $\mathcal{L}(F_i)[s] = f(s) \qquad i = 1,2$.

Donc, on a

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-s_1)(s-s_2)} \frac{\xi(s)}{m}\right] = \int_0^t \mathcal{Y}(t-s)\, \frac{\xi(s)}{m}\, ds$$

où $\mathcal{L}[\mathcal{Y}][s] = \dfrac{s}{(s-s_1)(s-s_2)}$

On peut utiliser le meme système qu'avant :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-s_1)(s-s_2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s-s_1} + \frac{b}{s-s_2}\right] = a e^{s_1 t} + b e^{s_2 t}$$

avec $\begin{cases} a + b = 1 \\ a s_2 = -b s_1 \end{cases}$

Enfin, on trouve

$$\mathcal{Y}(t) = e^{-\Gamma t}\, \mathcal{C}(t) \qquad (7)$$

En combinant les équations (6) et (7) on arrive à la solution générale de l'équation (1) :

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= v_0 e^{-\Gamma t} C(t) - \left(\frac{\omega_0^2 x_0}{\Delta}\right) \sinh(\Delta t) e^{-\Gamma t} + \\ &\quad + \frac{1}{m}\int_0^t e^{-\Gamma(t-s)} C(t-s)\, \xi(s)\, ds \end{aligned}} \qquad (8)$$

La fonction d'autocorrelation

La fonction d'autocorrelation de la vitesse peut être obtenue en calculant la moyenne du produit $v(t_1)\, v(t_2)$ par rapport à la variable aléatoire ξ, avec les conditions

$$\begin{cases} \langle \xi \rangle_\xi = 0 & \forall\, t \\ \langle \xi(t_1)\, \xi(t_2) \rangle_\xi = c_0 \delta(t_2 - t_1) \end{cases} \qquad (9)$$

La constante c_0 mesure la largeur de la distribution des fluctuations.
La valeur de c peut être obtenue en imposant la condition de stationnarité pour $t \to \infty$.

En exploitant les conditions (9) avec l'expression (8), on obtient : ($t_1 > t_2$, par ex.)

$$\langle v(t_1)v(t_2)\rangle_{\xi} = v_0^2 e^{-\Gamma(t_1+t_2)} C(t_1)C(t_2) +$$

$$+ \left(\frac{\omega_0^4 x_0^2}{\Delta^2}\right) e^{-\Gamma(t_1+t_2)} \sinh(\Delta t_1)\sinh(\Delta t_2)$$

$$+ \frac{c\sigma}{m^2}\int_0^{t_1} e^{-\Gamma(t_1+t_2-2s)} C(t_1-s)\,C(t_2-s)\,ds$$

$$+ x_0 v_0 \left(\cdots\cdots\right) \qquad (10)$$

On observe que l'observable est la moyenne thermodynamique de l'expression (10). Donc, on a :

$$\begin{cases} \langle x_0^2\rangle_T = \dfrac{kT}{m\omega_0^2} \\ \langle v_0^2\rangle_T = \dfrac{kT}{m} \\ \langle x_0 v_0\rangle_T = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Enfin, si on prend $t_2 = 0$, et on impose la condition

$$\lim_{t_1\to\infty} \langle v(t_1)v(0)\rangle_{\xi,T} = \frac{kT}{m}$$

on trouve la condition :

$$\frac{C_\sigma}{4m^2\Gamma} = \frac{kT}{m}$$

dont $\boxed{C_\sigma = 2m\gamma kT}$

On a obtenu le même resultat qu'on trouve dans le cas d'une particule libre, ce qui corresponde au partage d'energie a l'equilibre entre deplacement et vitesse (équations 11).