Mécanique des fluides

Gerald Kneller

16 avril 2018

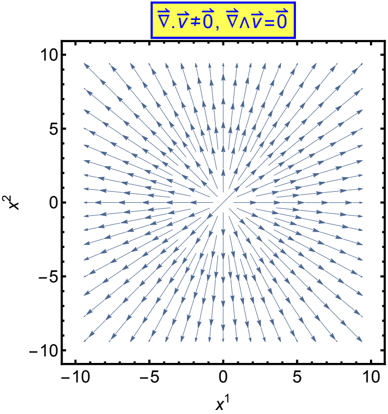
Introduction

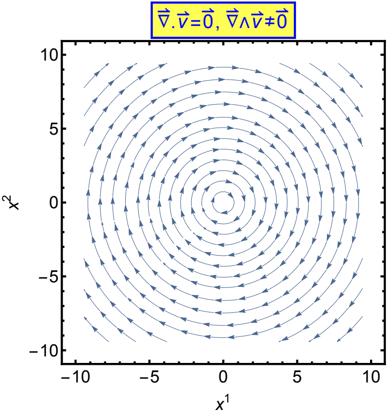
Modèle physique

- Le fluide est modélisé par un continuum.
- Dans cette description, même un élément de volume différentiel dV contient encore un très grand nombre de molécules du fluide.
- Les quantités physiques sont des champs qui varient en fonction de la position dans l'espace et en fonction du temps.
- Le champ fondamental est le champ de vitesse, $\vec{v}(X, t)$, où $X \equiv \{x^1, x^2, x^3\}$ sont des coordonnées cartésiennes ou curvilignes.
- Dans un environnement homogène, les fonctions représentant les champs sont différentiables.

Introduction

Champ de vitesse





Deux exemples pour un champ de vitesse statique en deux dimensions.

Le changement de masse dans un élément de volume V est entièrement donné par le flux net de masse à travers la surface du volume,

$$\frac{d}{dt}\int_V dV\,\rho(X,t) = -\oint_{\partial V} d\vec{a}\cdot\{\rho(X,t)\vec{v}(X,t)\}.$$

Ici $\rho(X,t)\vec{v}(X,t) \equiv \vec{\jmath}(X,t)$ est la densité de courant de la masse. On note que le changement est positif si $d\vec{a}\cdot\vec{v} < 0$. En applicant le théorème de Gauß on trouve

$$\frac{d}{dt}\int_V dV\,\rho(X,t) = -\int_V dV\,\vec{\nabla}\cdot\{\rho(X,t)\vec{v}(X,t)\}$$

ce qui donne l'équation de continuité [1]

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\{\rho\vec{v}\} = 0} \qquad (1)$$

1. les arguments (X,t) sont supprimés.

Equations fondamentales des milieux continus

Conservation de la masse – dérivée substantielle

L'équation de continuité pour la masse peut être développée

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0.$$

Introduisant la dérivée substantielle $\boxed{\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}}$ on écrit

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0} \tag{2}$$

La dérivée substantielle de ρ décrit le changement total par variation intrinsèque $(\partial \rho / \partial t)$ et convectiuon $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho)$. Pour un fluide incompressible

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \oint_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{v} = 0.$$

Le changement de la quantité de mouvement dans un élément de volume est

$$\frac{d}{dt}\int_V dV\,\rho(X,t)\vec{v}(X,t) = \underbrace{-\oint_{\partial V} d\vec{a}\cdot\{\rho(X,t)\vec{v}(X,t)\otimes\vec{v}(X,t)\}}_{\text{convection}}$$

$$\underbrace{-\oint_{\partial V} d\vec{a}\cdot\vec{\vec{P}}(X,t)}_{\text{force du fluide extérieur sur } \partial V} \quad \underbrace{+\int_V dV\,\rho(X,t)\vec{k}(X,t)}_{\text{force externe}}$$

Ici $\vec{\vec{P}}$ est le tenseur de pression et $\vec{k}$ est la force par masse d'unité.

En forme matricielle (base euclidienne) on écrit

$$\frac{d}{dt}\int_V dV\,\rho(X,t)\mathbf{v}(X,t) = -\oint_{\partial V} d\mathbf{a}\cdot\{\rho(X,t)\mathbf{v}(X,t)\cdot\mathbf{v}^T(X,t)\}$$
$$-\oint_{\partial V} d\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}(X,t) + \int_V dV\,\rho(X,t)\mathbf{k}(X,t)$$

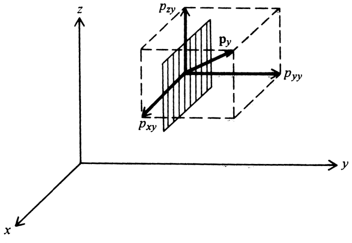
où $\mathbf{P}$ est la matrice contenant les composantes de $\vec{\vec{P}}$,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}.$$

Equations fondamentales des milieux continus

Bilan de la quantité de mouvement – tenseur de pression cont.

Visualisation des composantes du tenseur de pression [2] :



La figure montre les forces per unité de surface, $p_{xy}\,\vec{e}_x$, $p_{yy}\,\vec{e}_y$, $p_{zy}\,\vec{e}_z$, sur un élément de surface $d\vec{a} = da\,\vec{e}_y$ et $\vec{p}_y = p_{xy}\,\vec{e}_x + p_{yy}\,\vec{e}_y + p_{zy}\,\vec{e}_z$. Pour un fluide non-visqueux les composantes non-diagonales du tenseur de pression sont nulles et si le fluide est isotrope le tenseur de pression est entièrement décrit par un scalaire, $\mathbf{P} = p\mathbf{1}$.

En appliquant le théorème de Gauß au bilan pour la quantité du mouvement on dérive l'équation de continuité

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\{\rho\vec{v}\} + \vec{\nabla}\cdot\{\rho\vec{v}\otimes\vec{v}\} = \rho\vec{k} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{P}}} \tag{3}$$

Avec l'équation de continuité pour la masse cette équation peut être réécrite sous la forme [2]

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{k} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{P}}} \tag{4}$$

2. $D\vec{v}/Dt$ est la dérivée substantielle de $\vec{v}$.

Avec la densité d'énergie cinétique, $\rho|\vec{v}|^2/2$, la densité d'énergie potentielle, $\rho\phi$, la densité de flux de chaleur, $\vec{\jmath}_Q$, le bilan pour le changement d'énergie dans un élément de volume V s'écrit

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int dV\,\rho(X,t)\left\{\frac{1}{2}|\vec{v}(X,t)|^2+\phi(X,t)\right\}}_{\text{energie dans } V} =$$

$$\underbrace{-\oint_{\partial V} d\vec{a}\cdot\vec{\jmath}_Q(X,t)}_{\text{flux de chaleur}}\underbrace{-\oint_{\partial V} d\vec{a}\cdot\vec{\vec{P}}(X,t)\cdot\vec{v}(X,t)}_{\text{travail effectué/temps}}$$

$$\underbrace{-\oint_{\partial V} d\vec{a}\cdot\vec{v}(X,t)\rho(X,t)\left\{\frac{1}{2}|\vec{v}(X,t)|^2+\phi(X,t)\right\}}_{\text{convection}}.$$

En définissant l'abréviation

$$\epsilon = \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 + \phi$$

pour l'énergie par masse d'unité et en utilisant le théorème de Gauß, l'équation du blian mène à l'équation de continuité

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) + \vec{\nabla} \cdot \{(\rho\epsilon)\vec{v}\} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_Q - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\vec{P}} \cdot \vec{v}\right)} \tag{5}$$

Equations fondamentales des milieux continus

Conservation de l'énergie - équation de continuité 2

Utiliser que $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\vec{P}} \cdot \vec{v} \right) = \vec{v} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{P}} \right) + \vec{\vec{P}} : \vec{\nabla} \otimes \vec{v}$. Ici ":" dénote une contraction totale, $\vec{\vec{P}} : \vec{\nabla} \vec{v} = P^{ij} (\vec{\nabla} \otimes \vec{v})_{ij}$. Avec ceci

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) + \vec{\nabla} \cdot \{(\rho\epsilon)\vec{v}\} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q - \vec{v} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{P}} \right) - \vec{\vec{P}} : \vec{\nabla} \otimes \vec{v}.$$

ou bien

$$\frac{D}{Dt}(\rho\epsilon) + (\rho\epsilon)\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q - \vec{v} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{P}} \right) - \vec{\vec{P}} : \vec{\nabla} \otimes \vec{v}.$$

Ecrire

$$\underbrace{\epsilon\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{D\epsilon}{Dt}}_{\frac{D}{Dt}(\rho\epsilon)}+(\rho\epsilon)\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_Q-\vec{v}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{P}}\right)-\vec{\vec{P}}:\vec{\nabla}\vec{v}.$$

Avec Eq. (2) (conservation de la masse) il suit que que

$$\boxed{\rho\frac{D\epsilon}{Dt}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_Q-\vec{v}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{P}}\right)-\vec{\vec{P}}:\vec{\nabla}\otimes\vec{v}} \tag{6}$$

Equations fondamentales des milieux continus

Conservation de l'énergie - équation de continuité 3

Avec Eq. (4) (conservation de la quantité du mouvement) on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{P}} = \rho \vec{k} - \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$, et Eq. (6) peut être réécrite sous la forme

$$\boxed{\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \underbrace{-\vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath}_Q}_{(1)} \underbrace{-\rho \vec{v} \cdot \vec{k}}_{(2)} + \underbrace{\rho \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt}}_{(3)} \underbrace{-\vec{\vec{P}} : \vec{\nabla} \otimes \vec{v}}_{(4)}} \qquad (7)$$

Les sources pour le changement d'énergie :

1. flux de chaleur
2. forces externes
3. flux de masse
4. forces exercées par le fluide environnant

Les équations (2), (4) et (7) sont les équations fondamentales des milieux continus. Il faut pourtant encore préciser $\vec{\vec{P}}$ et $\vec{\jmath}_Q$, afin de pouvoir résoudre des problèmes concrets. A ce point on fait des hypothèses, par exemple la validité de la loi de Fourier,

$$\boxed{\vec{\jmath}_Q = -\lambda \vec{\nabla} T} \tag{8}$$

où λ est le coefficient de contuctivité de chaleur et T est la température. Une deuxième hypothèse est que $\vec{\vec{P}}$ est linéaire en $\vec{\nabla} \otimes \vec{v}$,

$$\boxed{P_{ij} = \alpha_{ij}^{kl} (\vec{\nabla} \otimes \vec{v})_{kl}} \tag{9}$$

Pour un milieu isotrope qui est seulement déformé et qui n'effectue ni une translation ni une rotation globale, le tenseur $\vec{\vec{P}}$ a la forme [3]

$$\boxed{P_{ij} = \left(p + \left(\frac{2}{3}\eta - \kappa\right)\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\delta_{ij} + \eta\left(\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{v}\right)_{ij} + \left(\vec{\nabla}\otimes\vec{v}\right)_{ji}\right)} \quad (10)$$

Ici η et κ sont, respectivement, la viscosité de cisaillement et de volume [4] et p est la pression scalaire. Le coefficient η mesure la résistivité d'un fluide à un cisaillement et κ la résistivité à une compression. Pour un gaz parfait on a $\eta = 0$, $\kappa = 0$ et donc $P_{ij} = p\delta_{ij}$.

3. Voir ref. [2] et les articles cités dans cet ouvrage.
4. En anglais *shear viscosity* et *bulk viscosity*.

Equation de Navier-Stokes

Dérivation

L'équation de Navier-Stokes pour le champ de vitesse, $\vec{v}$, d'un fluide est obtenue en insérant l'expression (10) pour $\vec{\vec{P}}$ dans l'équation (4) pour le bilan de 'la quantité du mouvement,

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{k} + \eta\Delta\vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \kappa\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{\nabla}p} \qquad (11)$$

Développer la dérivée substantielle souligne la forme non-linéaire de cette équation aux dérivées partielles

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \rho\vec{k} + \eta\Delta\vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \kappa\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{\nabla}p} \quad (12)$$

Nombre de Reynolds

En introduisant une longueur typique L et une vitesse typique U l'équation (12) peut s'écrire sous la forme (voir TD)

$$\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial t'} + \mathrm{Re}\,\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}'\right)\vec{v}' = \mathrm{Re}\,\vec{\kappa}' + \Delta\vec{v}' + \left(\frac{1}{3} + \frac{\kappa}{\eta}\right)(\vec{\nabla}' \cdot \vec{v}')\vec{v}' + \mathrm{Re}\,\vec{\nabla}' p',$$

où

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U L}{\eta} \quad \text{(nombre de Reynolds)},$$

$$\epsilon = \frac{\rho L^2}{\tau\eta}.$$

- On distingue entre un vecteur $\vec{u}$ et ses composantes *contravariantes* $\{u^1, u^2, u^3\}$ par rapport à une base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$: $\vec{u} = u^1\vec{b}_1 + u^2\vec{b}_2 + u^3\vec{b}_3$.
- La base duale, $\{\vec{b}^1, \vec{b}^2, \vec{b}^3\}$, est définie par $\vec{b}_i \cdot \vec{b}^j = \delta_i^j$ et peut être construite via

$$\vec{b}^1 = \frac{1}{V}(\vec{b}_2 \wedge \vec{b}_3), \quad \vec{b}^2 = \frac{1}{V}(\vec{b}_3 \wedge \vec{b}_1), \quad \vec{b}^3 = \frac{1}{V}(\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2),$$

  où $V = \vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \wedge \vec{b}_3)$.
- Dans la base duale $\vec{u}$ est représenté par ses composantes *covariantes*, $\vec{u} = u_1\vec{b}^1 + u_2\vec{b}^2 + u_3\vec{b}^3$.
- La base euclidienne est dénotée par $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Elle est orthonormale, $\vec{e}_j \cdot \vec{e}^k = \delta_{jk}$, tel que $\vec{e}^k = \vec{e}_k$ $(j, k = 1, 2, 3)$.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une injection $\{\vec{u}, \vec{v}\} \to \mathbb{R}$ qui est linéaire dans les deux arguments, [5]

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} = \{u^i \vec{b}_i\} \cdot \{v^j \vec{b}_j\} &= u^i v^j \{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j\} \equiv g_{ij} u^i v^j, \\
= \{u^i \vec{b}_i\} \cdot \{v_j \vec{b}^j\} &= u^i v_j \{\vec{b}_i \cdot \vec{b}^j\} = u^i v_i, \\
= \{u_i \vec{b}^i\} \cdot \{v^j \vec{b}_j\} &= u_i v^j \{\vec{b}^i \cdot \vec{b}_j\} = u_i v^i, \\
= \{u_i \vec{b}^i\} \cdot \{v_j \vec{b}^j\} &= u_i v_j \{\vec{b}^i \cdot \vec{b}^j\} \equiv g^{ij} u_i v_j,
\end{aligned}
$$

où $g_{ij} = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j$ sont les coefficients du tenseur métrique et $g^{ij} = \vec{b}^i \cdot \vec{b}^j$. Avec $\mathbf{g} \equiv (g_{ij})$ il suit que $(g^{ij}) = \mathbf{g}^{-1}$. Avec ceci

$$
u_i = g_{ij} u^j \quad \text{et} \quad u^i = g^{ij} u_j.
$$

5. On utilise la convention de Einstein pour la sommation (sommation automatique sur deux indices identiques).

Bases mathématiques

Produit tensoriel, tenseurs

- Le produit tensoriel (dyade) de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une injection $\{\vec{u}, \vec{v}\} \to \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ qui est linéaire dans les deux arguments,

$$\begin{aligned}
\vec{u} \otimes \vec{v} &= \{u^i \vec{b}_i\} \otimes \{v^j \vec{b}_j\} = u^i v^j \{\vec{b}_i \otimes \vec{b}_j\}, \\
&= \{u_i \vec{b}^i\} \otimes \{v^j \vec{b}_j\} = u_i v^j \{\vec{b}^i \otimes \vec{b}_j\}, \\
&= \{u^i \vec{b}_i\} \otimes \{v_j \vec{b}^j\} = u^i v_j \{\vec{b}_i \otimes \vec{b}^j\}, \\
&= \{u_i \vec{b}^i\} \otimes \{v_j \vec{b}^j\} = u_i v_j \{\vec{b}^i \otimes \vec{b}^j\}.
\end{aligned}$$

- Plus généralement, un tenseur de rang 2 est défini par

$$\vec{\vec{T}} = T^{ij} \vec{b}_i \otimes \vec{b}_j, = T_i^j \vec{b}^i \otimes \vec{b}_j, = T_j^i \vec{b}_i \otimes \vec{b}^j, = T_{ij} \vec{b}^i \otimes \vec{b}^j.$$

Un exemple est le tenseur métrique via $\vec{\vec{g}} = g_{ij} \vec{b}^i \otimes \vec{b}^j$.

Bases mathématiques

Produit scalaire et tensoriel dans une base euclidienne

- On utilise une notation matricielle pour la représentation de vecteurs et de tenseurs de rang 2 dans la base euclidienne,

$$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3)^T,$$

$$\vec{\vec{B}} = \sum_{i,j} B_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}.$$

- Produit scalaire et tensoriel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} : \{\vec{u}, \vec{v}\} \to \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3,$$

$$\vec{u} \otimes \vec{v} : \{\vec{u}, \vec{v}\} \to \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix}.$$

  On note que $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = \mathrm{tr}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T)$.

- $X \equiv \{x^1, x^2, x^3\}$ dénote des coordonnées cartésiennes ou généralisées.
- $\rho(X,t)$, $\vec{a}(X,t)$ et $\vec{\vec{B}}(X,t)$ dénotent, respectivement, un champ scalaire, vectoriel et tensoriel (rang 2).
- Les vecteurs de base d'un champ vectoriel (tensoriel) dépendent en général de la position,

$$\vec{a}(X,t) = \sum_i a^i(X,t)\vec{b}_i(X), \quad \text{etc.},$$

$$\vec{\vec{B}}(X,t) = \sum_i B^{ij}(X,t)\vec{b}_i(X) \otimes \vec{b}_j(X), \quad \text{etc.}$$

- Un système de 3 coordonnées curvilignes, $X \equiv \{x^1, x^2, x^3\}$, définit une position dans l'espace

$$\vec{R}(X) = \sum_j R_j(X)\vec{e}_j.$$

- Dans un tel système de coordonnées on un peut définir des vecteurs de base locaux par

$$\vec{b}_i(X) = \frac{\partial}{\partial x^i}\vec{R}(X).$$

Ces vecteurs sont tangents aux lignes parcourues par $\vec{R}(X)$ si seule la coordonnée x_i varie.

Bases mathématiques

Gradient, divergence

- Le gradient d'un champ scalaire $\phi(X)$ est un champ vectoriel :

$$\vec{\nabla}\phi(X) = \vec{b}^i(X)\frac{\partial \phi}{\partial x^i}.$$

- La divergence d'un champ vectoriel $\vec{u}(X)$ est un scalaire :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u}(X) = \left(\vec{b}^i(X)\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\cdot\left(u^j(X)\vec{b}_j(X)\right)$$

- Le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{u}(X)$ est un vecteur :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{u}(X) = \left(\vec{b}^i(X)\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\wedge\left(u^j(X)\vec{b}_j(X)\right).$$

Littérature

1. E. Guyon, J-P Hulin & L. Petit. Hydrodynamique Physique. EDP Sciences, CNRS Editions. 3ème édition. 2012.
2. D. McQuarrie, Statistical Mechanics. Chapitre 17 "Continuum mechanics". Harper's Chemistry Series, Harper Collins Publishers, 1976.