Exercices Mécanique des Fluides
Licence de Physique / STI
Bases mathématiques

1. *Base duale, coordonnées co- et contravariantes.*
   Soit $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ une base dans un espace vectoriel n-dimensionnel, $\{\vec{b}^1, \ldots, \vec{b}^n\}$ la base duale et $\vec{u}$ un vecteur quelconque dans cet espace. Montrer que
   (a) $u_i = \vec{b}_i \cdot \vec{u}$ et $u^i = \vec{b}^i \cdot \vec{u}$,
   (b) $\vec{b}^i = g^{ij}\vec{b}_j$,
   (c) $\vec{b}^i \cdot \vec{b}^j = g^{ij}$,
   (d) $u_i = g_{ij}u^j$ et $u^i = g^{ij}u_j$.

2. *Base réciproque (duale) en cristallographie.*
   Soient
   $$\vec{b}_1 = a\vec{e}_x, \quad \vec{b}_2 = \frac{a}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}a}{2}\vec{e}_y, \quad \vec{b}_3 = c\vec{e}_z$$
   trois vecteurs qui engendrent la maille d'un cristal. Déterminer le base duale, $\{\vec{b}^1, \vec{b}^2, \vec{b}^3\}$, par les formules données dans le cours et par la relation $\vec{b}^i = g^{ij}\vec{b}_j$ (voir exercice 1b).

3. *Coordonnées sphériques.*
   Les coordonnées sphériques, $\{r, \theta, \phi\}$, sont définies par les relations
   $$x = r\cos\phi\sin\theta, \quad y = r\sin\phi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta,$$
   où $r \in (0, \infty), \theta \in [0, \pi), \phi \in [0, 2\pi)$. Calculer
   (a) Les vecteurs de la base tangente, $\{\vec{b}_r, \vec{b}_\theta, \vec{b}_\phi\}$.
   (b) Les vecteurs de la base duale, $\{\vec{b}^r, \vec{b}^\theta, \vec{b}^\phi\}$.
   (c) La divergence d'un champ vectoriel $\vec{U}(r, \theta, \phi)$.
   (d) Le laplacien d'un champ sclaire $f(r, \theta, \phi)$.

4. *Une forme particulière pour la base duale.*
   On définit les coordonnées $\{u, v, w\}$ par les relations
   $$x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = 2uv + w,$$
   où $u, v, w \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer la base tangente $\{\vec{b}_u, \vec{b}_v, \vec{b}_w\}$.
   (b) Exprimer u, v, w par x, y, z et montrer que
   $$\vec{b}^u = \vec{e}_x\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial u}{\partial z},$$
   $$\vec{b}^v = \vec{e}_x\frac{\partial v}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial v}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial v}{\partial z}$$
   $$\vec{b}^w = \vec{e}_x\frac{\partial w}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial w}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial w}{\partial z}$$
   définissent la base duale à $\{\vec{b}_u, \vec{b}_v, \vec{b}_w\}$.
   (c) Montrer que les relations ci-dessus définissent la base duale pour n'importe quel jeux de coordonnées $\{u, v, w\}$.

1. *Champs vectoriels.*
   Construire des champs vectoriels $\vec{A}(X,t)$ tel que
   (a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.
   (b) $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0$.
2. *Concervation de la quantité du mouvement.*
   Montrer l'équivalence des équations
   $$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho\vec{v}\} + \vec{\nabla} \cdot \{\rho\vec{v} \otimes \vec{v}\} = \rho\vec{k} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{P}}$$
   et
   $$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{k} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{P}}$$
   qui expriment la conservation de la quantité du mouvement d'un fluide Ici D/Dt est la dérivée substantielle (voir cours). Utiliser ici la loi de conservation de la masse.
3. *Diffusion libre.*
   La conservation de la masse est exprimée par l'équation de continuité.
   $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0.$$
   (a) Supposant que $\rho\vec{v} = -D\vec{\nabla}\rho$ (loi de Fick), où D est la constante de diffusion, dériver l'équation différentielle pour ρ. Cette équation est l'équation de diffusion. Quelle est la dimension physique de D ?
   (b) Déterminer la solution en coordonnées cartésiennes pour la condition initiale $\rho(X,0) = \delta(X)$. Concseil : Utiliser la factorisation $\rho(X,t) = \rho(x,t)\rho(y,t)\rho(z,t)$ et résoudre l'équation pour un de ces facteurs.
   (c) Calculer le champ de vitesse, $\vec{v}(X,t)$ pour cette solution.
   (d) Ecrire l'équation de diffusion en coordonnées sphériques, supposant que $\rho \equiv \rho(r)$.

1. *Nombre de Reynolds.*
   En introduisant une vitesse d'écoulement typique, U, une longueur typique, L, et une échelle de temps typique, τ, dériver l'équation de Navier-Stokes sans dimensions,

$$\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial t'} + \mathrm{Re}\,\vec{v}'\cdot\vec{\nabla}'\right)\vec{v}' = \mathrm{Re}\,\vec{\kappa}' + \Delta\vec{v}' + \left(\frac{1}{3}+\frac{\kappa}{\eta}\right)(\vec{\nabla}'\cdot\vec{v}')\vec{v}' + \mathrm{Re}\,\vec{\nabla}'p',$$

   où

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U L}{\eta} \quad \text{(nombre de Reynolds)},$$
$$\epsilon = \frac{\rho L^2}{\tau\eta}.$$

   Montrer d'abord que $\vec{\kappa} = (U^2/L)\vec{\kappa}'$ et $p = (\rho U^2)p'$ sont des définitions pertinentes d'une densité de forces et d'une pression, respectivement, sans dimension.
2. *Flux laminaire et stationnaire.*
   — Interpréter la définition du nombre de Reynolds.
   — En utilisant les résultats de l'exercice précédente, discuter le fondement physique et les combinaisons possibles des approximations Re $\ll 1$ et $\epsilon \ll 1$ de l'équation de Navier-Stokes.