

# Mathématiques pour Sciences Physiques 5

**Gerald R. Kneller**

Université d'Orléans  
et  
Centre de Biophysique Moléculaire, CNRS  
Rue Charles Sadron  
45071 Orléans

## Table des matières

Chapitre 1. Rappel nombres complexes	3
1. L'ensemble des nombres complexes	3
2. Opérations fondamentales de l'arithmétique	4
3. Formule d'Euler et Moivre	5
4. Représentation matricielle	7
5. Racines d'un nombre complexe	9
Chapitre 2. Séries de Fourier	11
1. La forme réelle	11
2. La forme complexe	13
3. Illustration	14
4. Approximation d'une fonction périodique	16
5. Règles de calcul	18
6. Corrélation et convolution	21
7. Peigne de Dirac	28
8. Solution des équations différentielles	32
Chapitre 3. La transformée de Fourier	37
1. Dérivation heuristique	37
2. Distribution de Dirac	38
3. Quelques exemples	42
4. Règles de calcul	44
5. Convolution et corrélation	47
6. La fonction de Heaviside	50
7. Solution des équations différentielles	54
8. Transformée de Fourier spatiale	60
Chapitre 4. Eléments de l'analyse complexe.	63
1. Définition	63
2. Quelques fonctions élémentaires	63
3. Différentiation d'une fonction complexe	66
4. Intégration d'une fonction complexe	69
5. Le théorème de Cauchy	72
6. La formule fondamentale de l'analyse complexe	73
7. Séries de Taylor et de Laurent	76
8. Calcul de résidus	80

Chapitre 5. La transformation de Laplace	85
1. Transformée de Laplace et transformée inverse	85
2. Exemples	87
3. Quelques règles de calcul pour la transformée de Laplace	89
4. Solution des équations différentielles	93

## Chapitre 1

### Rappel nombres complexes

Les nombres complexes ont été introduits afin de pouvoir résoudre les *équations algébriques* de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

où  $a_n \in \mathbb{R}$  et  $a_n \neq 0$ . Sans perte de généralité on peut poser  $a_n = 1$ . Un exemple bien connu est l'équation quadratique,

$$x^2 + px + q = 0,$$

où  $p, q \in \mathbb{R}$ . Il est bien connue, qu'une telle équation peut être résolue par extension quadratique qui donne l'équation équivalente  $(x + p/2)^2 - p^2/4 + q = 0$ . On voit bien qu'il y a deux solutions :

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}.$$

Si  $p^2/4 - q < 0$  on doit évaluer la racine d'un nombre réel et négatif. On est donc amené à définir des nombres dont le carré peut être négatif – les nombres complexes – si on veut qu'il y ait une solution dans ce cas. Dans d'autres contextes cas l'utilisation des nombres complexes n'est pas indispensable, mais bien pratique. Ceci concerne surtout la description mathématique de tous les phénomènes de vibration en physique et en ingénierie.

#### 1. L'ensemble des nombres complexes

On définit d'abord formellement une *unité réelle*, 1, que est l'élément neutre de la multiplication, et une *unité imaginaire*,  $i$ , qui a la propriété

$$i^2 = -1. \tag{1}$$

Un nombre complexe arbitraire est une combinaison linéaire de 1 et de  $i$ ,

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

On appelle  $x$  la *partie réelle* de  $z$  et  $y$  la *partie imaginaire*,

$$x = \Re\{z\}, \tag{3}$$

$$y = \Im\{z\}. \tag{4}$$

Deux nombres complexes sont identiques si leurs parties réelles et leur parties imaginaires sont égales. L'ensemble de tous les nombres complexes est

$$\mathbb{C} := \{z | z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}. \tag{5}$$

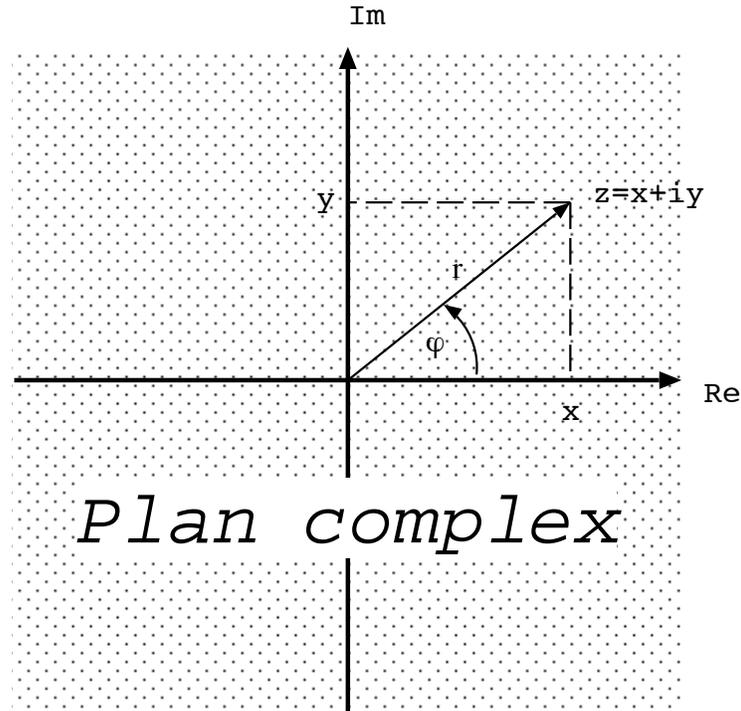


FIGURE 1. Le plan complexe.

Si l'on définit deux axes perpendiculaires, un axe réel et un axe imaginaire,  $x$  et  $y$  apparaissent comme la projection de  $z$  sur ces axes (voir figure 1), et on peut définir le *module* d'un nombre complexe comme pour un vecteur dans un repère Cartésien de deux dimensions :

$$r \equiv |z| := \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (6)$$

## 2. Opérations fondamentales de l'arithmétique

**2.1. Addition.** On donne deux nombres complexes  $z_1 = x_1 + iy_1$  et  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Comme pour les vecteurs, l'addition de deux nombres complexes est définie par l'addition des composantes :

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (7)$$

L'addition est commutative,  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ .

**2.2. Multiplication.** On obtient la règle de multiplication en traitant  $i$  comme un "nombre normal", utilisant cependant  $i^2 = -1$  :

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (8)$$

On voit que  $z_1 z_2 = z_2 z_1$ . On note que la multiplication d'un nombre  $z = x + iy$  avec  $-1$  donne  $-z = -x - iy$ , ce qui permet de définir la différence de deux nombres complexes,  $z_1$  et  $z_2$  par  $z_1 - z_2 = z_1 + (-1)z_2$ .

**2.3. La complexe conjuguée.** La complexe conjuguée de  $z = x + iy$  est définie par

$$z^* := x - iy. \quad (9)$$

En utilisant cette définition on trouve que

$$\Re\{z\} = \frac{z + z^*}{2}, \quad (10)$$

$$\Im\{z\} = \frac{z - z^*}{2i}, \quad (11)$$

$$|z|^2 = z^* z. \quad (12)$$

On vérifie que

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \quad (13)$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*. \quad (14)$$

**2.4. Inverse et division.** La règle de multiplication peut être combinée avec la définition de  $z^*$  afin d'obtenir l'inverse d'un nombre complexe et ensuite la règle de division. Pour  $z = x + iy$ ,  $|z| \neq 0$ , on écrit

$$z^{-1} \equiv \frac{1}{z} := \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}. \quad (15)$$

On voit facilement que  $z^{-1} z = z z^* / |z|^2 = 1$ . La division de  $z_1$  par  $z_2$  est alors donnée par

$$z_1 / z_2 := z_1 z_2^{-1} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (16)$$

**2.5. Forme polaire.** D'après fig. (1) et la définition (6) du module d'un nombre complexe  $z$  on peut écrire

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (17)$$

car la partie réelle et imaginaire de  $z$  sont données par  $x = r \cos \phi$  et  $y = r \sin \phi$ , respectivement. On appelle  $\phi$  la *phase* de  $z$ .

### 3. Formule d'Euler et Moivre

Nous allons maintenant dériver la formule d'Euler et Moivre qui simplifie considérablement la manipulation de la forme polaire des nombres complexes. En utilisant les séries de Taylor pour  $\cos \phi$  et  $\sin \phi$ , on trouve que

$$\cos \phi + i \sin \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{(2n)!} \phi^{2n} + i \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \phi^{2n+1} \right\}.$$

Or,  $(-1)^n = i^{2n}$ , et par conséquent

$$\cos \phi + i \sin \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n)!} (i\phi)^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!} (i\phi)^{2n+1} \right\}.$$

La première série ne contient que des termes paires en  $n$  et la deuxième ne contient que des termes impaires. On peut alors écrire

$$\cos \phi + i \sin \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\phi)^n = \exp(i\phi). \quad (18)$$

Ceci est la célèbre *formule d'Euler et Moivre*. En utilisant (10) et (11), on voit que

$$\cos \phi = \Re\{\exp(i\phi)\} = \frac{\exp(i\phi) + \exp(-i\phi)}{2}, \quad (19)$$

$$\sin \phi = \Im\{\exp(i\phi)\} = \frac{\exp(i\phi) - \exp(-i\phi)}{2i}. \quad (20)$$

D'après (17) un nombre complexe quelconque peut être écrite sous la *forme exponentielle* :

$$z = r \exp(i\phi). \quad (21)$$

L'exponentielle  $\exp(i\phi)$  est un cas spécial de l'exponentielle complexe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (22)$$

qui existe pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Les fonctions d'une variable complexe seront traitées dans le chapitre 4 et on note ici qu'on peut les règles  $(\exp z)^n = \exp nz$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) et  $\exp z_1 \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$ . La forme exponentielle des nombres complexes est ainsi particulièrement utile pour la multiplication et la division. Si  $z_1 = r_1 \exp(i\phi_1)$  et  $z_2 = r_2 \exp(i\phi_2)$  ( $|z_2| \neq 0$ ), on trouve

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \exp(i[\phi_1 + \phi_2]), \quad (23)$$

$$z_1 / z_2 = \frac{r_1}{r_2} \exp(i[\phi_1 - \phi_2]). \quad (24)$$

On note que  $\exp(2k\pi i) = 1$ , et par conséquent

$$z = r \exp(i[\phi + 2k\pi]), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (25)$$

Pour la puissance d'un nombre complexe,  $z = r \exp i\phi$ , on obtient

$$z^n = (r \exp i\phi)^n = r^n \exp(in\phi) = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi). \quad (26)$$

On peut également dériver les théorèmes d'addition pour  $\sin x$  et  $\cos x$  : Comme  $\exp(i[x + y]) = \exp ix \exp iy$ , il suit que

$$\begin{aligned} \exp(i[x + y]) &= \cos(x + y) + i \sin(x + y) \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y). \end{aligned}$$

On trouve alors que

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) &= \cos x \sin y + \sin x \cos y.\end{aligned}$$

La formule d'Euler et Moivre permet également de calculer  $d/dt \exp(iat)$  et  $\int dt \exp(iat)$ , ce qui est très utile pour la manipulation des séries et des transformées de Fourier. Comme  $\exp(iat) = \cos(at) + i \sin(at)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il suit que (exercice)

$$\frac{d}{dt} \exp(iat) = i\alpha \exp(iat), \quad (27)$$

$$\int dt \exp(iat) = \frac{\exp(iat)}{i\alpha} + C. \quad (28)$$

On a donc les mêmes règles pour la différentiation et l'intégration des exponentielles réelles. La différentiation et l'intégration des fonctions d'une variable complexe,  $f(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , seront discutées en chapitre 4.

#### 4. Représentation matricielle

Il existe une isomorphie entre les nombres complexes et certaines matrices réelles de dimension  $2 \times 2$ . On définit

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

comme unité réelle et imaginaire, respectivement. En appliquant la multiplication matricielle, on vérifie que  $\mathbf{I}^2 = -\mathbf{1}$ . La représentation matricielle d'un nombre complexe  $z = x + iy$  s'écrit alors

$$\mathbf{Z} = x\mathbf{1} + y\mathbf{I} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Le module  $z$  est donné par le déterminant de  $\mathbf{Z}$ ,

$$|z| = \sqrt{\det(\mathbf{Z})}. \quad (31)$$

Si  $z_1 \equiv x_1 + iy_1$  et  $z_2 \equiv x_2 + iy_2$  ( $|z| \neq 0$ ), les opérations  $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$ ,  $\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2$  et  $\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2^{-1}$  donnent les représentations matricielles de  $z_1 \pm z_2$ ,  $z_1 z_2$  et  $z_1/z_2$ , respectivement :

— *Addition* :

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -(y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

— *Multiplication* :

$$\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 & -(y_1 x_2 + x_1 y_2) \\ y_1 x_2 + x_1 y_2 & x_1 x_2 - y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

L'échange des indices "1" et "2" montre que la multiplication est commutative, bien que la multiplication matricielle ne l'est en général pas!

— *Division* :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2^{-1} &= \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \frac{1}{\underbrace{x_2^2 + y_2^2}_{1/\|\mathbf{Z}_2\|}} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} \begin{pmatrix} x_1x_2 + y_1y_2 & -(y_1x_2 - x_1y_2) \\ y_1x_2 - x_1y_2 & x_1x_2 + y_1y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On note que  $\|\mathbf{Z}_2\| = |z_2|$  est le déterminant de  $\mathbf{Z}_2$  et que le résultat ci-dessus reflète l'identité  $z_1/z_2 = z_1z_2^*/|z_2|^2$ .

La représentation de  $u = \exp(i\phi) = \cos \phi + i \sin \phi$ , est donnée par une *matrice orthogonale*,

$$\mathbf{U} := \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (32)$$

avec  $\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{1}$ . Ici "T" dénote une transposition (les lignes deviennent les colonnes et *vice versa*) et "." une multiplication matricielle. On sait que l'application d'une matrice orthogonale à un vecteur de colonne ne change pas la norme du dernière. Soit  $\zeta = (x, y)^T$  un vecteur de colonne qui contient les deux composantes d'un nombre complexe. Considère maintenant le vecteur de colonne  $\zeta' = (x', y')^T$  qui est défini par

$$\zeta' = \mathbf{U} \cdot \zeta = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et qui contient la partie réelle et imaginaire, respectivement, du nombre complexe  $z' = \exp(i\phi)z$ . On vérifie que

$$\zeta'^T \cdot \zeta' = x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 = \zeta^T \cdot \zeta,$$

ce qui suit de l'orthogonalité de  $\mathbf{U}$ , car

$$\zeta'^T \cdot \zeta' = (\mathbf{U} \cdot \zeta)^T \cdot \mathbf{U} \cdot \zeta = \zeta^T \cdot \underbrace{\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U}}_{=\mathbf{1}} \cdot \zeta = \zeta^T \cdot \zeta.$$

Le cosinus de l'angle entre  $\zeta$  et  $\zeta'$  est donné par

$$\cos \varphi_{\zeta\zeta'} = \frac{\zeta'^T \cdot \zeta}{\zeta^T \cdot \zeta} = \cos \phi.$$

Ceci illustre bien que la multiplication d'un nombre complexe,  $z$ , par  $\exp(i\phi)$  est décrite par une rotation dans le plan  $\{x, y\}$  et que  $\exp(i\phi)$  correspond à une matrice orthogonale dans l'isomorphie entre les nombres complexes et les matrices  $2 \times 2$  introduites ci-dessus.

### 5. Racines d'un nombre complexe

On cherche les solutions de l'équation algébrique de la forme spéciale

$$z^n - a = 0, \quad (33)$$

où  $a \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On verra qu'il y a  $n$  solutions qui sont les *racines d'ordre  $n$*  de  $a$ . En écrivant  $a$  sous la forme polaire,  $a = r_a \exp(i\phi_a)$ ,  $r_a \equiv |a|$ , on voit facilement que  $z = \sqrt[n]{r_a} \exp(i\phi_a/n)$  est une solution de l'équation (33). Comme  $a = a \exp(2k\pi i)$  ceci est aussi vrai pour tout nombre de la forme  $z_k = \sqrt[n]{r_a} \exp(i[\phi_a + 2k\pi]/n)$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ , mais il n'y a que  $n$  solutions différentes,

$$z_k = \sqrt[n]{r_a} \exp(i[\phi_a + 2k\pi]/n), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (34)$$

Les  $n$  racines sont situées sur un cercle de rayon  $r \equiv |z| = \sqrt[n]{r_a}$  dans le plan complexe, et la racine  $k$  a la phase  $\phi_k = (\phi_a + 2k\pi)/n$  (voir la figure 2). Afin de

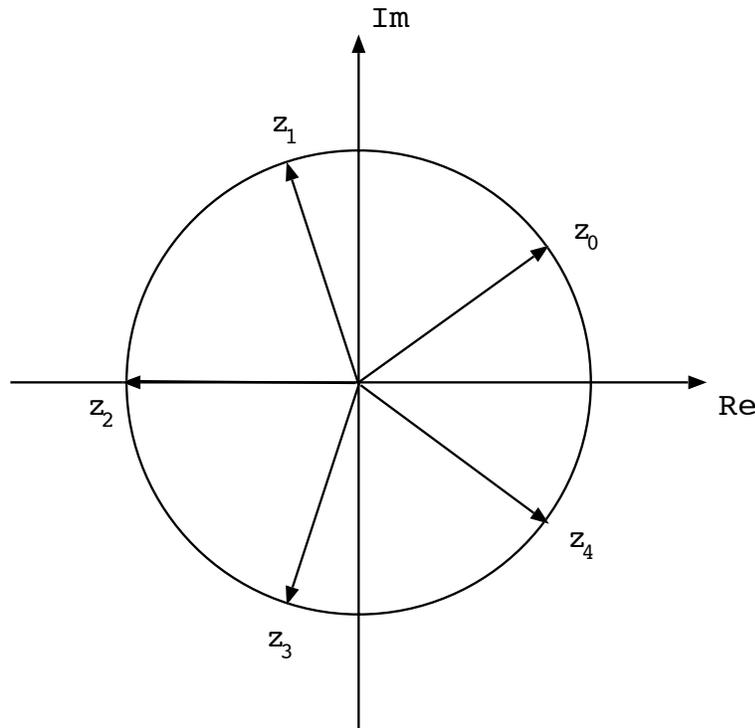


FIGURE 2. Les cinq solutions de  $z^5 + 32 = 0$ . Ici  $r \equiv |z| = 2$  et  $\phi = (2k+1)\pi/5$ ,  $k = 0, \dots, 4$ .

souligner la multiplicité des racines d'un nombre complexe, on écrit parfois

$$z_k = z_0 \zeta_k, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

où  $z_0$  et  $\zeta_k$  sont définis par

$$\begin{aligned}z_0 &= \sqrt[n]{r_a} \exp(i\phi_a/n), \\ \zeta_k &= \exp(i2k\pi/n).\end{aligned}$$

## Chapitre 2

### Séries de Fourier

#### 1. La forme réelle

On considère d'abord des *fonctions réelles périodiques*. Si  $T$  est la période d'une fonction  $f(t)$ , la périodicité peut être exprimée par

$$f(t + nT) = f(t), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (35)$$

Si les *conditions de Dirichlet* (conditions suffisantes),

- a)  $f(t)$  est une fonction définie partout en  $(0, T)$ , à l'exception d'un nombre fini de points,
  - b)  $f(t)$  et  $f'(t)$  sont continues entre deux discontinuités,
  - c) en dehors de  $(0, T)$   $f(t)$  est périodique avec la période  $T$ ,
- sont remplies,  $f(t)$  peut être développée en une série de Fourier,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t), \quad (36)$$

où  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\omega_0$  est la pulsation,

$$\omega_0 := \frac{2\pi}{T}. \quad (37)$$

Si  $f(t)$  est discontinue en un nombre fini de points  $t_k \in (0, T)$  la série (36) converge vers

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} f(t) & t \neq t_k \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(t_k + \epsilon) + f(t_k - \epsilon)}{2} & t = t_k \end{cases}. \quad (38)$$

Dans la suite on ne distinguera pas entre  $\hat{f}(t)$  et  $f(t)$ , sachant que la série de Fourier est "presque partout" identique à  $f(t)$ .

Chaque fonction  $f(t)$  peut être décomposée en une *partie paire*,

$$f_+(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2},$$

et une *partie impaire*,

$$f_-(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}.$$

La série (36) montre que

$$f_+(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t), \quad (39)$$

$$f_-(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t). \quad (40)$$

On peut obtenir les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  en utilisant les *relations d'orthogonalité*

$$\int_0^T dt \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) = \frac{T}{2} \delta_{m,n} \quad (41)$$

$$\int_0^T dt \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) = \frac{T}{2} \delta_{m,n}, \quad (42)$$

$$\int_0^T dt \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) = 0, \quad (43)$$

où  $m, n \in \mathbb{N}$  et  $\delta_{mn}$  est le symbole de Kronecker,

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}.$$

En partant de la forme (36) de  $f(t)$  (on renomme les indices de sommation,  $n \rightarrow m$ ) on trouve avec (41) – (43) que

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt \cos(n\omega_0 t) f(t), \quad (44)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt \sin(n\omega_0 t) f(t). \quad (45)$$

Éq. (44) montre que  $a_0/2$  est la valeur moyenne de  $f(t)$  sur une période,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) \equiv \overline{f(t)}. \quad (46)$$

A cause de la périodicité de  $f(t)$  l'intervalle d'intégration dans (44) et (45) peut être décalé par une constante  $\alpha \in \mathbb{R}$  quelconque,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{T+\alpha} dt \cos(n\omega_0 t) f(t), \quad (47)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{T+\alpha} dt \sin(n\omega_0 t) f(t), \quad (48)$$

Si l'on choisit en particulier  $\alpha = -T/2$ , on obtient

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(n\omega_0 t) f(t) = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} dt \cos(n\omega_0 t) f_+(t), \quad (49)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \sin(n\omega_0 t) f(t) = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} dt \sin(n\omega_0 t) f_-(t). \quad (50)$$

En accord avec les identités (39) et (40)  $a_n \equiv 0$  si  $f(t)$  est impaire, et  $b_n \equiv 0$  si  $f(t)$  est paire.

## 2. La forme complexe

On reprend la forme réelle (36) d'une série de Fourier. La formule d'Euler et Moivre permet d'exprimer  $\cos(n\omega_0 t)$  et  $\sin(n\omega_0 t)$  par des exponentielles complexes (voir eqs. (19) et (20)) :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ \frac{\exp(in\omega_0 t) + \exp(-in\omega_0 t)}{2} \right\} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{ \frac{\exp(in\omega_0 t) - \exp(-in\omega_0 t)}{2i} \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{ \frac{a_n - ib_n}{2} \right\}}_{f_n} \exp(in\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{ \frac{a_n + ib_n}{2} \right\}}_{f_{-n}} \exp(-in\omega_0 t). \end{aligned}$$

La dernière ligne peut être écrite sous la forme compacte

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(in\omega_0 t), \quad (51)$$

où les coefficients  $f_n$  sont donnés par

$$f_0 = \frac{a_0}{2}, \quad (52)$$

$$f_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad n > 0, \quad (53)$$

$$f_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = f_n^* \quad n > 0. \quad (54)$$

La série de Fourier (51) montre qu'une fonction périodique peut être représentée par son *spectre complexe*,  $f(t) \leftrightarrow f_n$ , dont les pulsations associées sont  $\omega = n\omega_0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

On peut calculer les coefficients  $f_n$  sans la détermination préalable des coefficients  $a_n$  et  $b_n$ . Partant de la relation d'orthogonalité

$$\int_0^T dt \exp(im\omega_0 t) \exp(-in\omega_0 t) = T\delta_{m,n}, \quad (55)$$

et la représentation (51) de  $f(t)$  (renomination  $n \rightarrow m$ ), on vérifie que

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \exp(-in\omega_0 t) f(t) \\ &= \frac{1}{T} \int_\alpha^{T+\alpha} dt \exp(-in\omega_0 t) f(t), \end{aligned} \quad (56)$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La dernière ligne est une conséquence de la périodicité de  $f(t)$ . On note que  $f_0 = \overline{f(t)}$  est la valeur moyenne de  $f(t)$  sur une période. L'inversion des relations (52) – (54) donne

$$a_n = f_n + f_n^* = 2\Re\{f_n\} = 2\Re\{f_{-n}\}, \quad (57)$$

$$b_n = \frac{f_n^* - f_n}{i} = -2\Im\{f_n\} = 2\Im\{f_{-n}\}. \quad (58)$$

Comme  $f_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 = 2f_0$  et  $b_0 = 0$ .

Jusqu'à maintenant on a toujours supposé que  $f(t)$  est une fonction *réelle*,  $f : t \in \mathbb{R} \rightarrow f(t) \in \mathbb{R}$ . Pour cette raison les coefficients de Fourier  $\{a_n, b_n\}$  sont également réels, et les coefficients  $f_n$  de la forme complexe ont la propriété

$$f_{-n} = f_n^* \quad (59)$$

qui découle directement de (56). A cause des relations d'orthogonalité (41)–(43) et (55) les expressions pour les coefficients  $\{a_n, b_n\}$  et  $f_n$  restent toujours valables, même si  $f(t) \in \mathbb{C}$  (on discutera des fonctions complexes dans le chapitre 4). La seule différence est que les  $\{a_n, b_n\}$  sont également complexes, et la symétrie (59) n'existe plus.

### 3. Illustration

Considérons maintenant la fonction

$$f(t) = \frac{t}{2\pi} = f(t + 2\pi n) \quad t \in [0, 2\pi)$$

qui n'est ni paire ni impaire. On calcule les coefficients de Fourier en utilisant (44) et (45), avec  $T = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = 1$  :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dt \frac{t}{2\pi} = 1, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dt \cos(nt) \frac{t}{2\pi} = 0, \quad n > 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dt \sin(nt) \frac{t}{2\pi} = \frac{-1}{n\pi}, \quad n > 0. \end{aligned}$$

La série de Fourier de  $f(t)$  ("dents de scie") prend alors la forme

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

Pour  $t_k = 2k\pi$  cette série converge vers  $1/2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (f(t_k + \epsilon) + f(t_k - \epsilon))/2$ . Ceci confirme éq. (38). Fig. 1 montre l'approximation de  $f(t)$  par un nombre  $n_{max}$  fini de termes dans la série de Fourier. Pour  $n_{max} \rightarrow \infty$  la série converge vers  $f(t)$ .

Souvent une opération simple permet de transformer une fonction donnée en une fonction paire ou impaire. Un exemple est la fonction "dent de scie" utilisée dans cet exemple. Elle peut être écrite sous la forme  $f(t) = f_-(t) + 1/2$ , où  $f_-(t)$  est la partie impaire. On sait que les coefficients  $a_n^-$  sont zéro, et il suffit alors de calculer les  $b_n^- = b_n$ . En utilisant l'expression (50) on trouve que

$$b_n^- = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dt \sin(nt) \left( \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} \right) = \frac{-1}{n\pi} = b_n.$$

Calculons maintenant les coefficients de la série de Fourier complexe. En utilisant (56) on obtient

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \frac{t}{2\pi} \exp(-int) = \begin{cases} \frac{i}{2\pi n} & n \neq 0, \\ \frac{1}{2} & n = 0. \end{cases}$$

Les coefficients  $\{a_n, b_n\}$  sont obtenus en utilisant les identités (57) et (58) :

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\Re\{f_0\} = 1, \\ a_n &= 2\Re\{f_n\} = 0, \quad n > 0, \\ b_n &= -2\Im\{f_n\} = \frac{-1}{\pi n}. \end{aligned}$$

On retrouve bien les coefficients de la représentation réelle.

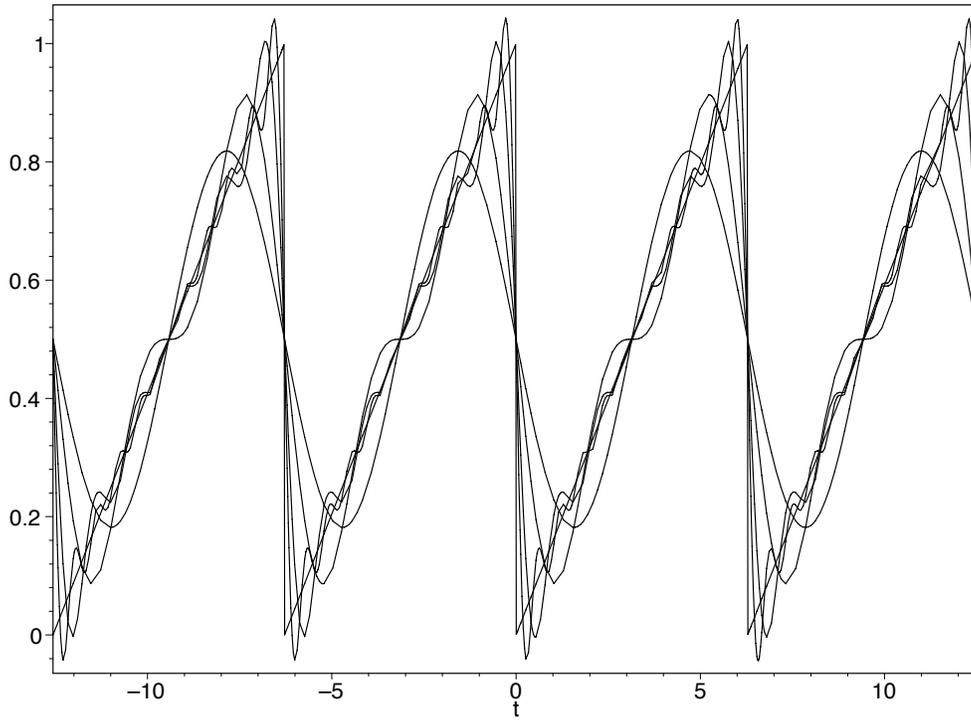


FIGURE 1. Approximation de la fonction  $f(t) = \frac{t}{2\pi}$  avec la période  $2\pi$  par 1, 2, 5, 10,  $\infty$  termes de la série de Fourier.

#### 4. Approximation d'une fonction périodique

Si  $f(t) = f(t + nT)$  est une fonction périodique de période  $T$  dont la série de Fourier existe, on appelle

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^N f_n \exp(in\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (60)$$

Somme de Fourier de l'ordre  $N$  de  $f(t)$ , qui représente une approximation. Dans la limite où  $N \rightarrow \infty$  on obtient la fonction  $f(t)$  sans approximation,

$$f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(t). \quad (61)$$

La fonction  $f_N(t)$  peut être interprétée comme représentation approximative de  $f(t)$  par un nombre fini de fonctions de base

$$\Phi_n(t) := \exp(in\omega_0 t). \quad (62)$$

Les coefficients  $f_n$  apparaissent alors comme "coordonnées" de  $f(t)$  dans cette base.

Afin de pouvoir quantifier la qualité d'une approximation il faut définir une "distance" entre  $f(t)$  et son approximation  $f_N(t)$ . Une distance est définie à travers une *norme*. Un exemple est la norme  $\mathcal{L}_T^2$ ,

$$\|f\| := \left( \int_0^T dt |f(t)|^2 \right)^{1/2}. \quad (63)$$

Si le *produit scalaire* de deux fonctions  $f(t), g(t)$  de même période  $T$  est défini par

$$(f, g) := \int_0^T dt f^*(t)g(t) = (g, f)^*, \quad (64)$$

on peut écrire

$$(f, f) := \|f\|^2. \quad (65)$$

En utilisant la norme  $\mathcal{L}_T^2$ , on peut mesurer la distance  $d_N$  entre  $f(t)$  et  $f_N(t)$  :

$$d_N^2 = \|f - f_N\|^2 = (f - f_N, f - f_N). \quad (66)$$

Ayant une mesure pour la qualité d'une approximation, on peut chercher une *approximation optimale*, partant de la forme

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N f_n \Phi_n(t), \quad (67)$$

où les coefficients  $f_n$  sont inconnus. Un critère possible pour définir ce qu'on appelle "optimale" est de postuler que

$$d_N^2 = (f - f_N, f - f_N) \stackrel{!}{=} \min. \quad (68)$$

La définition (64) du produit scalaire montre que  $d_N^2$  est une fonction des coefficients  $f_n$  et de leurs conjugués complexes,  $f_n^*$ . On a explicitement

$$d_N^2 = (f, f) - \sum_{l=-N}^N f_l (f, \Phi_l) - \sum_{k=-N}^N f_k^* (\Phi_k, f) + \sum_{k,l=-N}^N f_k^* f_l (\Phi_k, \Phi_l),$$

et avec l'orthogonalité des  $\Phi_n(t)$  (voir éq. 55),

$$(\Phi_k, \Phi_n) = T\delta_{k,n}, \quad (69)$$

on obtient

$$d_N^2 = (f, f) - \sum_{l=-N}^N f_l (f, \Phi_l) - \sum_{k=-N}^N f_k^* (\Phi_k, f) + T \sum_{k=-N}^N |f_k|^2.$$

En utilisant les conditions nécessaires pour un minimum de  $d_N^2$ ,

$$\frac{\partial d_N^2}{\partial f_n} = 0, \quad (70)$$

$$\frac{\partial d_N^2}{\partial f_n^*} = 0, \quad (71)$$

pour  $k = -N, \dots, N$  on trouve

$$f_n^* = \frac{1}{T}(f, \Phi_n), \quad (72)$$

$$f_n = \frac{1}{T}(\Phi_n, f), \quad (73)$$

respectivement. Comme  $d_N^2$  est réelle il suit que  $\partial d_N^2 / \partial f_k^* = (\partial d_N^2 / \partial f_k)^*$ . Les deux conditions (70) et (71) sont donc équivalentes – l'une est simplement la conjuguée complexe de l'autre – et par conséquent (72) et (73) contiennent la même information. La relation (73) montre que les coefficients  $f_n$  qui minimisent  $d_N^2$  sont identiques avec les coefficients de Fourier (56).

## 5. Règles de calcul

Dans la suite on discutera quelques propriétés fondamentales des séries de Fourier complexes. On admet en particulier des fonctions complexes  $f : t \in \mathbb{R} \rightarrow f(t) \in \mathbb{C}$ .

**5.1. Linéarité.** On considère deux fonctions périodiques,  $f(t)$  et  $g(t)$ , avec la même période,  $T$ , et les coefficients de Fourier  $f_n$  et  $g_n$ , respectivement. Soit  $s(t) := \alpha f(t) + \beta g(t)$ , où  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Pour la fonction  $s(t)$  on a la correspondance

$$s(t) := \alpha f(t) + \beta g(t) \longleftrightarrow s_n = \alpha f_n + \beta g_n. \quad (74)$$

La preuve est triviale : Les  $s_n$  sont obtenus par l'intégration (56), où  $f(t) \rightarrow \alpha f(t) + \beta g(t)$ , et l'intégration est une opération linéaire.

**5.2. Fonction complexe conjuguée.** Soit  $f(t)$  une fonction périodique,  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(in\omega_0 t)$ ,  $\omega_0 = 2\pi/T$ . La série de Fourier de  $f^*(t)$  est alors donnée par

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^* \exp(-in\omega_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{-n}^* \exp(in\omega_0 t).$$

Pour obtenir la série à droite on renomme  $n \rightarrow -m$  dans la série à gauche, on utilise ensuite que  $\sum_{m=+\infty}^{-\infty} (\dots) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\dots)$ , et on renomme finalement  $m \rightarrow n$ . On trouve alors que

$$f^*(t) \longleftrightarrow f_{-n}^*. \quad (75)$$

**5.3. Réflexion**  $t \rightarrow -t$ . Soit  $f(t)$  une fonction périodique dont la période est  $T$  et dont la série de Fourier existe,  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(in\omega_0 t)$ ,  $\omega_0 = 2\pi/T$ . La série de Fourier de  $f(-t)$  est alors donnée par

$$f(-t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(-in\omega_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{-n} \exp(in\omega_0 t).$$

Pour passer de la série à gauche à la série à droite on utilise la méthode de changement d'indice de sommation qu'on a utilisée pour dériver la correspondance (75). On obtient alors

$$f(-t) \longleftrightarrow f_{-n}. \quad (76)$$

Si  $f(t)$  est décomposée en une partie paire,  $f_+(t) = (f(t) + f(-t))/2$ , et une partie impaire,  $f_-(t) = (f(t) - f(-t))/2$ , on a les correspondances

$$f_+(t) \longleftrightarrow \frac{f_n + f_{-n}}{2}, \quad (77)$$

$$f_-(t) \longleftrightarrow \frac{f_n - f_{-n}}{2}. \quad (78)$$

Les coefficients de Fourier de  $f^+(t)$  sont pairs en  $n$  et ceux de  $f^-(t)$  sont impairs en  $n$ .

Si  $f(t)$  est réelle, et par conséquent  $f_{-n} = f_n^*$  (voir éq. (59)) il suit que

$$f(-t) \longleftrightarrow f_n^*, \quad (79)$$

et par conséquent

$$f_+(t) \longleftrightarrow \Re\{f_n\}, \quad (80)$$

$$f_-(t) \longleftrightarrow i\Im\{f_n\}. \quad (81)$$

Les coefficients de Fourier de  $f_+(t)$  sont purement réels et pairs en  $n$ , et ceux de  $f_-(t)$  sont purement imaginaires et impairs en  $n$ .

**5.4. Transformation de l'échelle de temps.** Soit  $f(t)$  une fonction périodique dont la période est  $T$  et dont la série de Fourier existe,  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(in\omega_0 t)$ ,  $\omega_0 = 2\pi/T$ . La série de Fourier de  $f(\gamma t)$ ,  $\gamma > 0$ , est alors donnée par

$$f(\gamma t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(in\omega_0 \gamma t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(in\Omega_0 t).$$

On trouve la correspondance

$$f(\gamma t) \longleftrightarrow f_n. \quad (82)$$

Les coefficients de  $g(t)$  sont les mêmes que pour  $f(t)$ , seule l'impulsion change de  $\omega_0$  à  $\Omega_0 = \gamma\omega_0$ . La transformation de l'échelle de temps est équivalente à une transformation de la fréquence fondamentale.

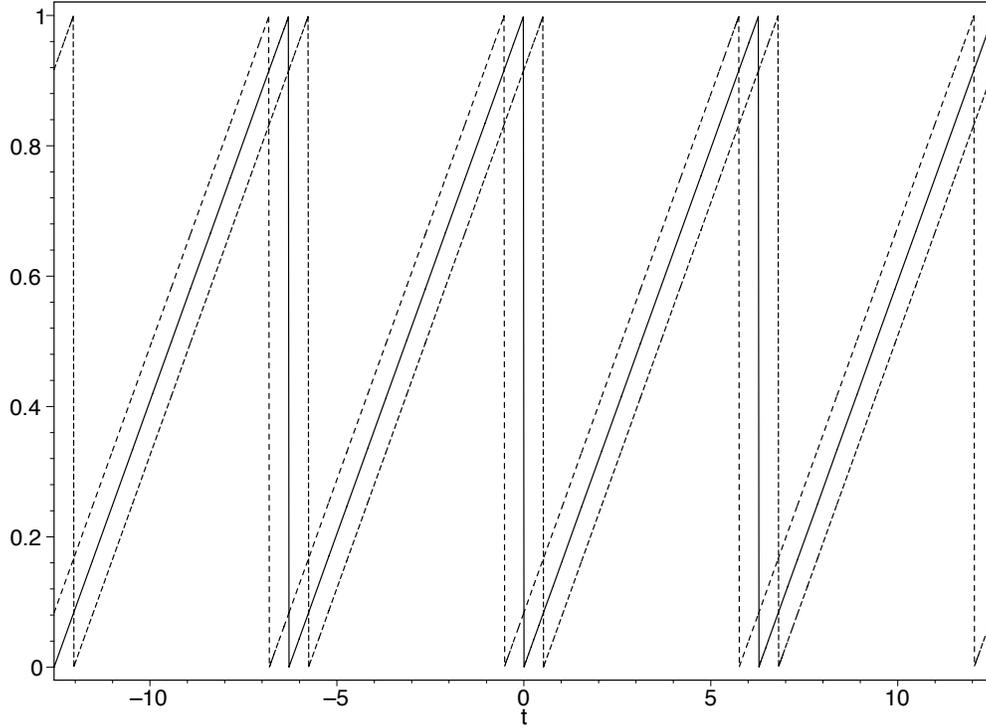


FIGURE 2. La fonction  $f(t) = \frac{t}{2\pi}$  avec la période  $2\pi$  et les fonctions décalées  $g(t) \equiv f(t + \pi/6)$  et  $h(t) \equiv f(t - \pi/6)$ . Les coefficients de Fourier sont  $f_n = i/(2\pi n)$ ,  $g_n = f_n \exp(in\pi/6)$ , et  $h_n = f_n \exp(-in\pi/6)$ , respectivement.

**5.5. Translation de l'échelle de temps.** Soit  $f(t)$  une fonction périodique dont la période est  $T$  et dont la série de Fourier existe,  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(in\omega_0 t)$ ,  $\omega_0 = 2\pi/T$ . La série de Fourier de  $f(t + \alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , est alors donnée par

$$f(t + \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(in\omega_0[t + \alpha]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{f_n \exp(in\alpha t)\} \exp(in\omega_0 t).$$

On trouve la correspondance

$$f(t + \alpha) \longleftrightarrow f_n \exp(in\omega_0 \alpha). \quad (83)$$

Remarque : Si  $\alpha > 0$ , l'échelle de temps est décalée vers la *gauche*, si  $\alpha < 0$ , l'échelle de temps est décalée vers la *droite* – voir fig. 2.

**5.6. Translation de l'échelle de fréquences.** Comme l'échelle de fréquences d'une fonction périodique est discrète, on peut considérer

des translations discrètes  $\omega = n\omega_0 \rightarrow \omega' = (n+k)\omega_0$ . On déduit de (51) que

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(in\omega_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{n+k} \exp(i[n+k]\omega_0 t) \\ &= \exp(ik\omega_0 t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{n+k} \exp(in\omega_0 t), \end{aligned}$$

si  $-\infty < k < \infty$ , et on obtient la correspondance

$$f(t) \exp(-[ik\omega_0 t]) \longleftrightarrow f_{n+k}. \quad (84)$$

## 6. Corrélation et convolution

Les théorèmes de convolution et corrélation ont une importance primordiale pour la théorie du traitement du signal, en particulier pour la discussion des systèmes linéaires comme des filtres. Ici on discutera des théorèmes de convolution et corrélation pour les fonctions périodiques.

**6.1. Convolution périodique.** La convolution de deux fonctions périodiques complexes de même période  $T$  est définie par

$$(f * g)_T(t) := \frac{1}{T} \int_0^T d\tau f(t - \tau)g(\tau). \quad (85)$$

La substitution  $\tau \rightarrow u = t - \tau$  dans l'intégrale et l'utilisation de la périodicité de  $f(t)$  et  $g(t)$  montrent que la convolution est *commutative* (exercice)

$$(f * g)_T(t) := (g * f)_T(t). \quad (86)$$

Le théorème de la convolution périodique dit que

$$(f * g)_T(t) \longleftrightarrow f_n g_n, \quad (87)$$

où  $f_n$  et  $g_n$  sont les coefficients de Fourier de  $f(t)$  et  $g(t)$ , respectivement. On suppose, bien entendu, que les séries de Fourier pour  $f(t)$  et  $g(t)$  existent.

PREUVE : Si  $C(t) := (f * g)_T(t)$ , les coefficients de Fourier de  $C(t)$  sont données par

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_0^T dt C(t) \exp(-in\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T d\tau f(t - \tau)g(\tau) \right\} \exp(-in\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T d\tau g(\tau) \int_0^T dt f(t - \tau) \exp(-in\omega_0 t). \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que l'on peut changer l'ordre des intégrales convergentes. Dans la deuxième intégrale on substitue  $t \rightarrow u = t - \tau$ . Ceci donne

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{T^2} \int_0^T d\tau g(\tau) \int_{-\tau}^{T-\tau} du f(u) \exp(-in\omega_0[u + \tau]) \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T d\tau g(\tau) \exp(-in\omega_0\tau) \int_{-\tau}^{T-\tau} du f(u) \exp(-in\omega_0u) \\
&= \underbrace{\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T d\tau g(\tau) \exp(-in\omega_0\tau) \right\}}_{g_n} \underbrace{\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T du f(u) \exp(-in\omega_0u) \right\}}_{f_n} = f_n g_n \quad \square
\end{aligned}$$

Pour passer de la deuxième ligne à la troisième on utilise que  $f(t)$  est périodique et  $\int_{-\tau}^{T-\tau} du f(u) \exp(-in\omega_0t) = \int_0^T du f(u) \exp(-in\omega_0t)$  (voir éq. (56)).

**6.2. Corrélation périodique.** La corrélation de deux fonctions périodiques complexes de la même période  $T$  est définie par

$$(f \circ g)_T(t) := \frac{1}{T} \int_0^T d\tau f(t + \tau) g^*(\tau). \quad (88)$$

Si  $g(t) = f(t)$  on parle d'une *autocorrélation*. Par rapport à la convolution l'argument de la fonction  $f$  dans l'intégrale (88) change de  $(t - \tau)$  à  $(t + \tau)$ , ce qui fait que la corrélation n'est pas commutative, et  $g(\tau)$  est remplacé par  $g^*(\tau)$ .

Le théorème de la corrélation périodique dit que

$$(f \circ g)_T(t) \longleftrightarrow f_n g_n^*, \quad (89)$$

où  $f_n$  et  $g_n$  sont les coefficients de Fourier de  $f(t)$  et  $g(t)$ , respectivement. Pour l'autocorrélation on a donc la correspondance

$$(f \circ f)_T(t) \longleftrightarrow |f_n|^2 \in \mathbb{R}. \quad (90)$$

La preuve se déroule de la même façon que pour la convolution : Avec  $C(t) := (f \circ g)_T(t)$  il suit que

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{T} \int_0^T dt C(t) \exp(-in\omega_0t) \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T dt \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T d\tau f(t + \tau) g(\tau) \right\} \exp(-in\omega_0t) \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T d\tau g^*(\tau) \int_0^T dt f(t + \tau) \exp(-in\omega_0t).
\end{aligned}$$

Dans la deuxième intégrale on substitue maintenant  $t \rightarrow u = t + \tau$  :

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{T^2} \int_0^T d\tau g^*(\tau) \int_\tau^{T+\tau} du f(u) \exp(-in\omega_0[u - \tau]) \\
 &= \frac{1}{T^2} \int_0^T d\tau g^*(\tau) \exp(in\omega_0\tau) \int_\tau^{T+\tau} du f(u) \exp(-in\omega_0u) \\
 &= \underbrace{\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T d\tau g^*(\tau) \exp(in\omega_0\tau) \right\}}_{g_n^*} \underbrace{\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T du f(u) \exp(-in\omega_0u) \right\}}_{f_n} = f_n g_n^* \quad \square
 \end{aligned}$$

**6.3. Théorème de Parseval.** D'après (90) l'autocorrélation d'une fonction périodique  $f(t)$  de période  $T$ , dont la série de Fourier existe, peut être écrite sous la forme

$$(f \circ f)_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^2 \exp(in\omega_0 t), \quad (91)$$

où  $\omega_0 = 2\pi/T$ . En utilisant la définition (88) de la corrélation périodique on trouve pour  $t = 0$

$$\frac{1}{T} \int_0^T d\tau |f(\tau)|^2 \equiv \overline{|f(\tau)|^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^2. \quad (92)$$

Ceci est le théorème de Parseval pour les séries de Fourier. Souvent  $|f(\tau)|^2$  représente l'énergie du signal  $f(t)$ . Dans ces cas le théorème de Parseval dit que la somme des carrés des amplitudes  $|f_n|$  équivaut à l'énergie moyenne du signal sur une période.

Le théorème de Parseval peut être formulé pour la représentation réelle des séries de Fourier. Ici  $f(t) \in \mathbb{R}$  et par conséquent

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \int_0^T d\tau f^2(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^2 = |f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{|f_n|^2 + |f_{-n}|^2\} \\
 &= |f_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2.
 \end{aligned}$$

En remplaçant  $f_n = (a_n - ib_n)/2$  (voir éq. (53)), on trouve la forme réelle du théorème de Parseval :

$$\frac{1}{T} \int_0^T d\tau f^2(\tau) \equiv \overline{f^2(\tau)} = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (93)$$

**6.4. Illustrations.** Voici quelques exemples pour illustrer l'application des théorèmes de convolution et corrélation des fonctions périodiques.

EXEMPLE 2.1. Soient

$$f(t) := \cos \omega_0 t, \quad g(t) := \sin \omega_0 t,$$

où  $\omega_0 = 2\pi/T > 0$ . Les coefficients de Fourier  $f_n, g_n$  sont donnés par

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt \exp(-in\omega_0 t) \underbrace{\left( \frac{\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)}{2} \right)}_{\cos \omega_0 t} = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 1 \\ \frac{1}{2} & n = -1 \\ 0 & n \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$g_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt \exp(-in\omega_0 t) \underbrace{\left( \frac{\exp(i\omega_0 t) - \exp(-i\omega_0 t)}{2i} \right)}_{\sin \omega_0 t} = \begin{cases} \frac{1}{2i} & n = 1 \\ -\frac{1}{2i} & n = -1 \\ 0 & n \neq \pm 1. \end{cases}$$

Ici on a utilisé la relation d'orthogonalité (55).

Toutes les relations concernant la convolution et la corrélation peuvent être facilement vérifiées :

— D'après le théorème de convolution on a

$$f_n g_n = \begin{cases} \frac{1}{4i} & n = 1 \\ -\frac{1}{4i} & n = -1 \\ 0 & n \neq \pm 1 \end{cases} \longleftrightarrow (f * g)_T(t) = \frac{1}{2} \sin \omega_0 t.$$

On vérifie que

$$\frac{1}{T} \int_0^T d\tau \cos(\omega_0[t - \tau]) \sin \omega_0 \tau = \frac{1}{2} \sin \omega_0 t.$$

— Le théorème de corrélation donne

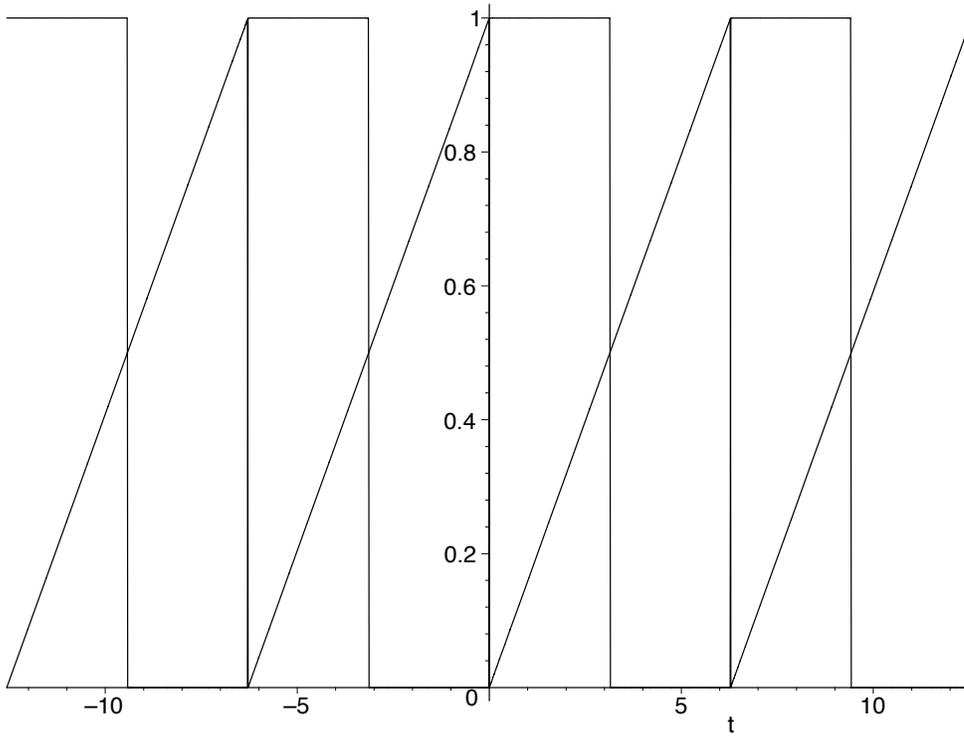
$$f_n g_n^* = \begin{cases} -\frac{1}{4i} & n = 1 \\ \frac{1}{4i} & n = -1 \\ 0 & n \neq \pm 1 \end{cases} \longleftrightarrow (f \circ g)_T(t) = -\frac{1}{2} \sin \omega_0 t.$$

On vérifie que

$$\frac{1}{T} \int_0^T d\tau \cos(\omega_0[t + \tau]) \sin \omega_0 \tau = -\frac{1}{2} \sin \omega_0 t.$$

— Pour les autocorrélations on trouve

$$|f_n|^2 = |g_n|^2 = \begin{cases} \frac{1}{4} & n = 1 \\ \frac{1}{4} & n = -1 \\ 0 & n \neq \pm 1 \end{cases} \longleftrightarrow (f \circ f)_T(t) = (g \circ g)_T(t) = \frac{1}{2} \cos \omega_0 t.$$

FIGURE 3. Les fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  de l'exemple 2.2.

On vérifie que

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \cos(\omega_0[t + \tau]) \cos \omega_0\tau &= \frac{1}{2} \cos \omega_0 t \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \sin(\omega_0[t + \tau]) \sin \omega_0\tau. \end{aligned}$$

— Le théorème de Parseval est confirmé :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n|^2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \cos^2 \omega_0\tau = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \sin^2 \omega_0\tau.$$

Comme  $a_n = \delta_{n,1}$ ,  $b_n = 0$  pour  $\cos \omega_0 t$  et  $a_n = 0$ ,  $b_n = \delta_{n,1}$  pour  $\sin \omega_0 t$ , la forme réelle du théorème de Parseval (voir éq. (93)) est également vérifiée.

EXEMPLE 2.2. On donne les deux fonctions (voir fig. 3)

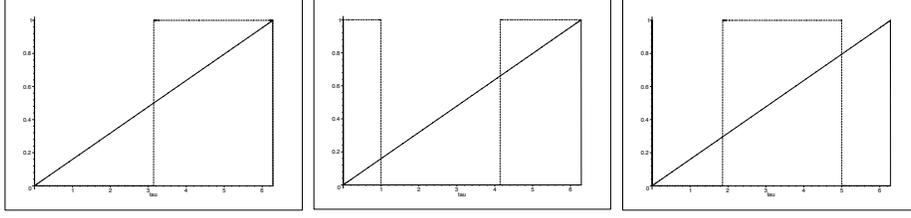


FIGURE 4. Illustration de la convolution des fonctions montrées en fig. 3. De gauche à droite on voit les paires de fonctions  $\{f(\tau), g(-\tau)\}$ ,  $\{f(\tau), g(1-\tau)\}$ ,  $\{f(\tau), g(5-\tau)\}$ , où  $\tau \in [0, 2\pi)$ .

$$f(t) := \frac{t}{2\pi} = f(t + 2\pi n) \quad t \in [2\pi)$$

$$g(t) := \begin{cases} 1 & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, 2\pi) \end{cases} \quad \text{période } 2\pi,$$

dont on cherche la convolution  $(f * g)_{2\pi}(t)$ . Pour simplifier le calcul on utilise la commutativité de la convolution, et on écrit la convolution sous la forme

$$(f * g)_{2\pi}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau g(t - \tau) f(\tau).$$

On note que  $g(t - \tau) = g(-[\tau - t])$ , ceci dit qu'on prend la fonction  $g(-\tau)$  qui est ensuite décalée par  $t$  vers la droite ( $t > 0$ ), tenant compte de la périodicité de  $g(t - \tau)$ . A cause de la forme simple de  $g$  il suffit de trouver les intervalles dans lesquels  $g(t - \tau)$  est différent de 0.

$$g(t - \tau) = 1 \quad \text{si} \quad \begin{cases} \tau \in \{(0, t) \cup (\pi + t, 2\pi)\} & 0 < t < \pi, \\ \tau \in (t - \pi, t) & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

Fig. 4 montre  $f(\tau)$  et  $g(t - \tau)$  pour  $t = 0, 1, 5$ . Dans la période fondamentale,  $t \in [0, 2\pi)$ , la convolution est donnée par

$$(f * g)_{2\pi}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^t d\tau \frac{\tau}{2\pi} + \int_{\pi+t}^{2\pi} d\tau \frac{\tau}{2\pi} \right) = \frac{3}{8} - \frac{t}{4\pi} & 0 \leq t < \pi, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^t d\tau \frac{\tau}{2\pi} = -\frac{1}{8} + \frac{t}{4\pi} & \pi \leq t < 2\pi, \end{cases}$$

et  $(f * g)_{2\pi}(t + 2\pi n) = (f * g)_{2\pi}(t)$ . On note que  $(f * g)_{2\pi}(t)$  est continue pour  $t \in \mathbb{R}$  :  $(f * g)_{2\pi}(0) = (f * g)_{2\pi}(0-) = 3/8$  et  $(f * g)_{2\pi}(\pi) = (f * g)_{2\pi}(\pi-) = 1/8$ .

Calculons maintenant les coefficients de Fourier de  $f(t)$ ,  $g(t)$ , et de la convolution  $(f * g)_{2\pi}(t)$ . Les coefficients  $f_n$  ont été déterminés dans la section 3,

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \frac{t}{2\pi} \exp(-int) = \begin{cases} \frac{i}{2\pi n} & n \neq 0, \\ \frac{1}{2} & n = 0, \end{cases}$$

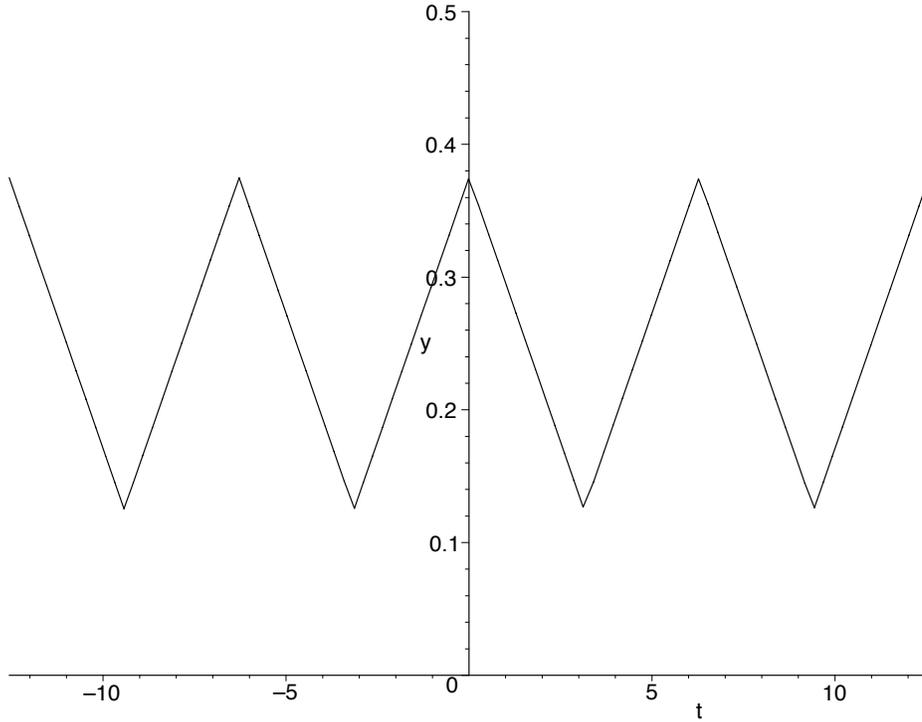


FIGURE 5. Convolution des fonctions montrées en fig. 3.

et les  $g_n$  sont donnés par

$$g_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi dt \exp(-int) = \begin{cases} \frac{i}{2\pi n} \left( (-1)^n - 1 \right) & n \neq 0, \\ \frac{1}{2} & n = 0. \end{cases}$$

D'après le théorème de convolution on trouve donc la correspondance

$$(f * g)_{2\pi}(t) \longleftrightarrow f_n g_n = \begin{cases} \frac{-1}{4\pi^2 n^2} \left( (-1)^n - 1 \right) & n \neq 0, \\ \frac{1}{4} & n = 0. \end{cases}$$

On vérifie qu'on trouve ce résultat également par calcul direct. Comme  $C(t) \equiv (f * g)_{2\pi}(t)$  est une fonction paire, les coefficients de Fourier sont donnés par

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dt \cos nt \left( \frac{3}{8} - \frac{|t|}{4\pi} \right) = \begin{cases} \frac{-1}{4\pi^2 n^2} \left( (-1)^n - 1 \right) & n \neq 0, \\ \frac{1}{4} & n = 0 \quad \square \end{cases}$$

On note que  $C_n = b_n/2$ , où  $b_n$  sont les coefficients de Fourier de la représentation réelle de  $C(t)$ . Les  $a_n$  sont égaux à zéro, car  $C(t)$  est paire.

## 7. Peigne de Dirac

Dans la théorie du traitement du signal l'action d'un "système linéaire", comme un filtre, est décrite par une convolution. Si  $f(t)$  est un signal donné, on écrit  $f(t) \longrightarrow \tilde{f}(t) = (f \star h)(t)$ , où  $h(t)$  est la *fonction de transfert* qui décrit le système linéaire. Dans le contexte des fonctions périodiques on peut alors chercher une fonction de transfert périodique qui laisse invariant un signal de la même période. Comme  $(f \star h)(t) \leftrightarrow f_n h_n$ , on cherche alors une fonction dont les coefficients de Fourier sont  $h_n = 1$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . On va voir qu'il n'y a pas une seule fonction qui a cette propriété, mais qu'il s'agit de la limite d'une classe de fonctions, qu'on appelle *peigne de Dirac*. Un peigne de Dirac est un exemple pour une *distribution*.

**7.1. Une représentation simple.** On considère maintenant la convolution des fonctions (voir fig. 6)

$$f(t) := \sin t,$$

$$H_\alpha(t) := \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha} & |t| \leq \alpha \\ 0 & |t| > \alpha \end{cases} \quad \text{période } 2\pi > 2\alpha.$$

La convolution de ces fonctions (voir fig. 7) est donnée par

$$\begin{aligned} (f * H_\alpha)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau f(t - \tau) H_\alpha(\tau) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} d\tau \sin(t - \tau) \\ &= \frac{\cos(t - \alpha) - \cos(t + \alpha)}{2\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \sin(t). \end{aligned}$$

On trouve alors que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (f * H_\alpha)(t) = f(t)$$

pour  $f(t) = \sin t$ .

Regardons maintenant les coefficients de Fourier de  $f(t)$  et  $H_\alpha(t)$ ,

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{2i} & n = 1 \\ -\frac{1}{2i} & n = -1 \\ 0 & n \neq \pm 1, \end{cases} \quad H_{\alpha,n} = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} d\tau \exp(-int) = \frac{\sin(n\alpha)}{(n\alpha)}.$$

Par conséquent

$$f_n H_{\alpha,n} = \begin{cases} \frac{1}{2i} \frac{\sin \alpha}{\alpha} & n = 1 \\ -\frac{1}{2i} \frac{\sin \alpha}{\alpha} & n = -1 \\ 0 & n \neq \pm 1 \end{cases} \longleftrightarrow (f * H_\alpha)(t) = \frac{\sin \alpha}{\alpha} f(t).$$

Le théorème de convolution est bien vérifié. Comme

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{\alpha,n} \rightarrow 1,$$

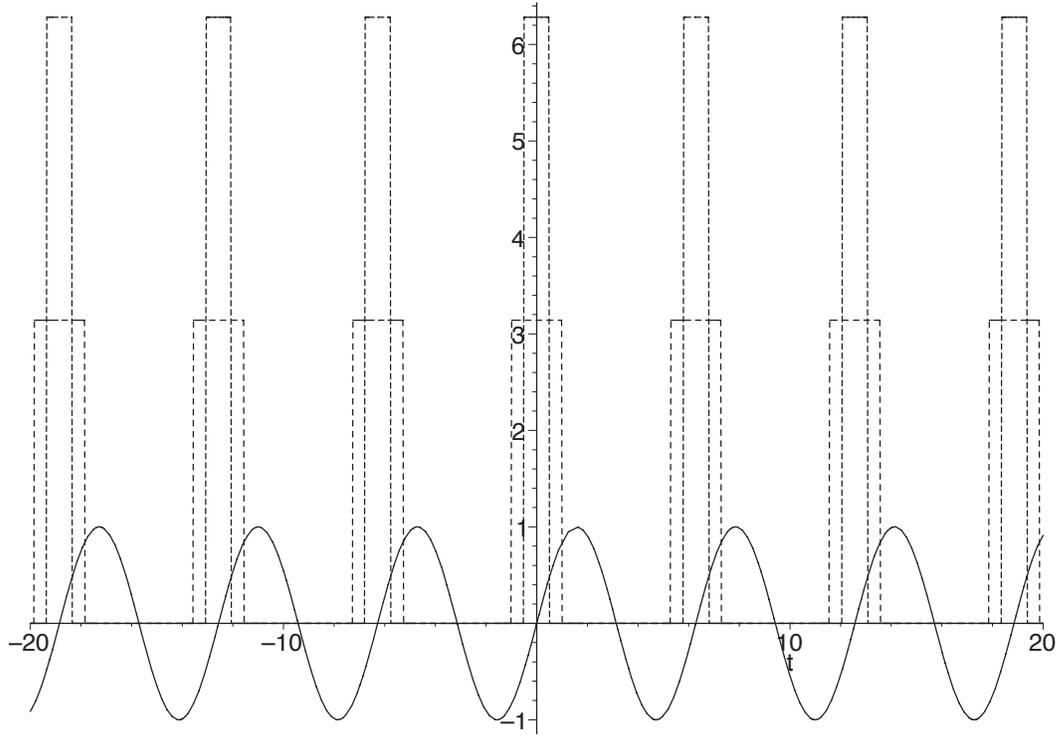


FIGURE 6. Les fonctions  $\sin(t)$  et  $H_\alpha(t)$  (voir chapitre 7.1). Les largeurs de  $H_\alpha(t)$  sont  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 0.5$ .

il suit que

$$\lim(f \star H_\alpha)(t) = f(t)$$

pour toute fonction  $f(t)$  dont la série de Fourier existe. Si  $f(t)$  a une période  $T$  quelconque on définit

$$H_{T,\alpha}(t) = \begin{cases} \frac{T}{2\alpha} & |t| \leq \alpha \\ 0 & |t| > \alpha \end{cases} \quad \text{période } T > 2\alpha. \quad (94)$$

Les coefficients de Fourier sont alors

$$H_{n;T,\alpha} = \frac{\sin(n\omega_0\alpha)}{(n\omega_0\alpha)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 1. \quad (95)$$

Cet exemple montre que l'élément neutre de la convolution périodique peut être obtenu par la limite

$$\Delta_T(t) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{T,\alpha}(t). \quad (96)$$

$\Delta_T(t)$  est un *peigne de Dirac*. Du point de vue mathématique il s'agit d'une *distribution périodique*. Cette notation vient du fait que les fonctions  $h_{T,\alpha}(t)$  sont

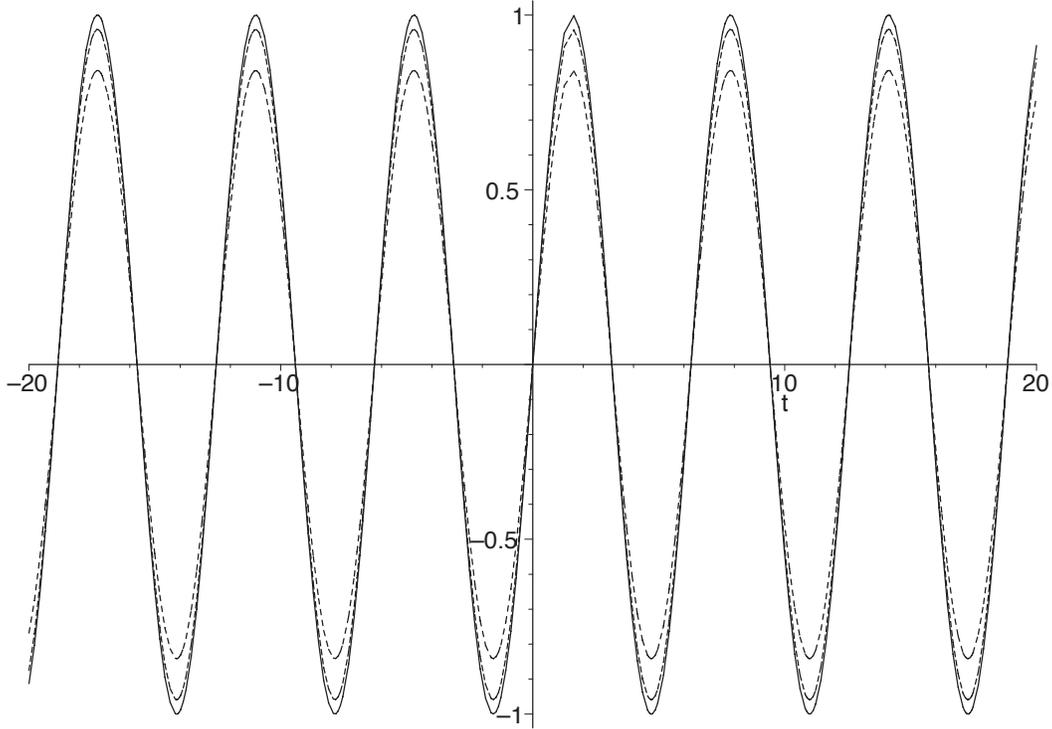


FIGURE 7. La convolution  $(f * H_\alpha)(t)$  pour les fonctions montrées en fig. 6.

normées à  $T$ ,

$$\int_0^T dt H_{T,\alpha}(t) = T, \quad (97)$$

quelque soit leur largeur  $\alpha$ . Ceci est une propriété caractéristique des distributions statistiques (qui sont normées à 1). Dans la limite  $\alpha \rightarrow 0$  on obtient la distribution  $\Delta_T(t)$  qui n'est plus une fonction au sens classique, mais qui garde la propriété de normalisation

$$\int_0^T dt \Delta_T(t) = T. \quad (98)$$

**7.2. Forme analytique d'un peigne de Dirac.** L'exemple suivant montre qu'il n'y a pas une seule façon de définir un peigne de Dirac, et qu'on peut trouver une forme analytique. Regardons la fonction

$$I_{r,T}(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \exp(in\omega_0 t); \quad 0 \leq |r| < 1, \quad \omega_0 = 2\pi/T, \quad (99)$$

où  $T$  est la période de  $I_{r,T}(t)$ . Par construction on a la correspondance

$$I_{r,T}(t) \longleftrightarrow r^{|n|} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 1, \quad (100)$$

et, comme la fonction  $h_{T,\alpha}(t)$  de l'exemple précédent (voir eqs. (94) et (97)),  $I_{r,T}(t)$  est normée à  $T$  pour tout  $r$  valable :

$$\int_0^T dt I_{r,T}(t) = T. \quad (101)$$

Ici on utilise que la valeur moyenne d'une fonction périodique  $f(t)$  est donné par  $f_0$  (voir éq. (46)) il suit que  $1/T \int_0^T dt I_{r,T}(t) = r^0 = 1$  pour tout  $r$  avec  $0 \leq |r| < 1$ . En utilisant que pour  $q \neq 1$

$$S_N = \sum_{k=0}^N q^k = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1,$$

la série (99) peut être écrite sous une forme analytique :

$$\begin{aligned} I_{r,T}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \exp(in\omega_0 t) + \sum_{n=0}^{\infty} r^n \exp(-in\omega_0 t) - 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [r \exp(i\omega_0 t)]^n + \sum_{n=0}^{\infty} [r \exp(-i\omega_0 t)]^n - 1 \\ &= \frac{1}{1 - r \exp(i\omega_0 t)} + \frac{1}{1 - r \exp(-i\omega_0 t)} - 1. \end{aligned}$$

Ceci peut être écrit sous la forme

$$I_{r,T}(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \omega_0 t + r^2}. \quad (102)$$

En utilisant (100) et (101) on voit que

$$\lim_{r \rightarrow 1} (f * I_{r,T})(t) = f(t), \quad (103)$$

et on obtient la deuxième forme d'un peigne de Dirac – voir fig. 8 :

$$\Delta_T(t) = \lim_{r \rightarrow 1} I_{r,T}(t). \quad (104)$$

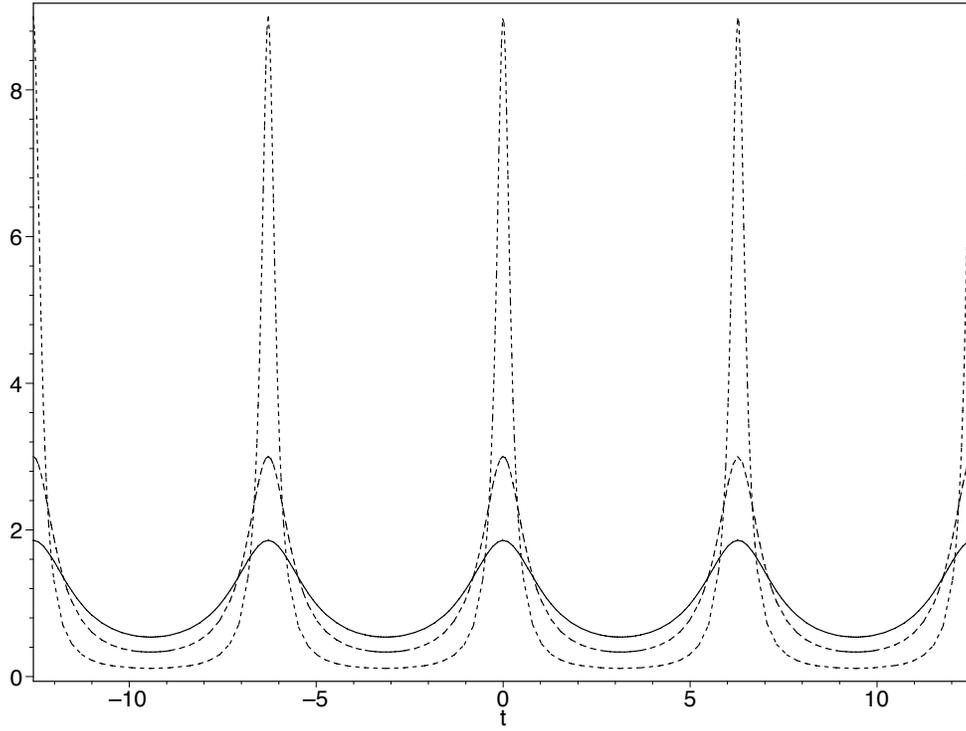


FIGURE 8. La fonction  $I_{r,T}(t)$  pour  $r = \{0.3, 0.5, 0.9\}$ . Dans la limite  $r \rightarrow 1$  on obtient le peigne de Dirac  $\Delta_T(t)$ .

## 8. Solution des equations différentielles

**8.1. Le concept.** On considère l'équation différentielle

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = f(t), \quad (105)$$

où  $a_k$  sont des *constantes* et  $y^{(m)}(t)$  est la  $m$ -ième dérivée de  $y(t)$  par rapport à  $t$ . On suppose que  $f(t)$  est une fonction périodique de période  $T$  dont la série de Fourier existe (on utilise ici l'indice de sommation  $k$ ),

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \exp(ik\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (106)$$

On pose maintenant que la solution de (105) a la forme

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k \exp(ik\omega_0 t). \quad (107)$$

En utilisant cette forme on voit que

$$\frac{d^m}{dt^m} y(t) \longleftrightarrow (ik\omega_0)^m y_k. \quad (108)$$

Ceci dit que les coefficients de Fourier de la  $m$ -ième dérivée de  $y(t)$  sont donnés par  $(ik\omega_0)^m y_k$ . Insertion de (107) et (106) dans l'équation différentielle (105) donne alors une relation entre les coefficients  $y_k$  et  $f_k$  :

$$P_n(ik\omega_0)y_k = f_k \quad (109)$$

où  $P_n(z)$  est le *polynôme caractéristique* de l'eq. différentielle (105) :

$$P_n(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n. \quad (110)$$

La solution pour  $y_k$  est donc donnée par

$$y_k = \frac{f_k}{P_n(ik\omega_0)}, \quad (111)$$

et  $y(t)$  prend la Forme d'une série de Fourier :

$$y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{f_k}{P_n(ik\omega_0)} \exp(ik\omega_0 t). \quad (112)$$

L'indice  $p$  indique que  $y_p(t)$  est une *solution particulière* à laquelle on peut toujours ajouter une solution de l'équation homogène, où  $f(t) \equiv 0$ . Ceci est vrai parce que (105) est une équation différentielle *linéaire*.

**8.2. Solution complète.** La solution complète de (105) est donnée par

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t), \quad (113)$$

où  $y_h(t)$  est la solution de l'équation différentielle

$$a_n y_0^{(n)}(t) + a_{n-1} y_0^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y_0^{(1)}(t) + a_0 y_0(t) = 0. \quad (114)$$

Ceci suit de la linéarité de l'équation différentielle (105). Définissant l'opérateur

$$\mathcal{L} := a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \quad (115)$$

l'équation différentielle (105) peut être écrite d'une manière compacte  $\mathcal{L}y = f$  et on a

$$\mathcal{L}\{y_p + y_h\} = \underbrace{\mathcal{L}y_p}_{=f} + \underbrace{\mathcal{L}y_h}_{=0} = f.$$

Si l'on pose

$$y_h(t) = \exp(\lambda t), \quad (116)$$

on obtient avec (114)

$$P_n(\lambda) = 0, \quad (117)$$

où  $P_n(z)$  est donné par (110). Eq. (117) possède  $n$  solutions  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Si les coefficients  $a_k$  sont réels, il existe pour chaque  $\lambda_k$  complexe une solution

complexe conjuguée. Comme (114) est une équation différentielle linéaire, la solution générale s'écrit sous la forme

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^n c_k \exp(\lambda_k t), \quad (118)$$

si tous les  $\lambda_k$  sont différents. Si  $\lambda_k$  a la multiplicité  $m_k$ , il y a  $m_k$  solutions de base indépendantes qui correspondent à  $\lambda_k$ ,

$$t^l \exp(-\lambda_k t), \quad l = 0, \dots, m_k - 1, \quad (119)$$

et la solution générale de l'équation homogène prend la forme

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{m_k-1} c_{kl} t^l \exp(\lambda_k t). \quad (120)$$

$N$  est le nombre de zéros différents. Les  $c_{kl}$  ( $c_k$ ) sont des constantes arbitraires qui peuvent être fixées en posant des conditions initiales pour  $y(t)$  et ses dérivées  $y_0^{(k)}(t)$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ .

**8.3. Fonction de transfert périodique.** La forme (111) des coefficients de Fourier montre qu'on peut écrire

$$y_k = h_k f_k, \quad (121)$$

où les  $h_k$  sont donnés par

$$h_k = \frac{1}{P_n(ik\omega_0)}. \quad (122)$$

Les  $h_k$  sont les coefficients de Fourier de la *fonction de transfert périodique*

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik\omega_0 t)}{P_n(ik\omega_0)}, \quad (123)$$

où  $P(z)$  est le polynôme caractéristique donné par (110). En appliquant le théorème de convolution à (121) on trouve que

$$y_p(t) = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau h(t - \tau) f(\tau), \quad (124)$$

quelque soit la forme de  $f(t)$ , à condition qu'elle soit périodique avec la période  $T$ . En posant  $f_k = 1$  dans l'éq. (121) on trouve que  $h(t)$  est la réponse à une fonction périodique dont tous les coefficients de Fourier sont égaux à 1. Une telle fonction est le peigne de Dirac, et par conséquent  $h(t)$  vérifie l'équation différentielle

$$a_n h^{(n)}(t) + a_{n-1} h^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 h^{(1)}(t) + a_0 h(t) = \Delta_T(t). \quad (125)$$

**8.4. Un exemple.** On donne l'équation différentielle

$$y^{(1)} + \gamma y(t) = \cos \omega_0 t, \quad (126)$$

où, en utilisant la notation plus habituelle,

$$\frac{dy}{dt} + \gamma y(t) = \cos \omega_0 t.$$

La constante  $\gamma$  est choisie positive,  $\gamma > 0$ . D'après l'identité (122) les coefficients de Fourier de la fonction de transfert sont donnés par

$$h_k = \frac{1}{ik\omega_0 + \gamma}.$$

Dans l'exemple 2.1 on avait vu que

$$f(t) \equiv \cos \omega_0 t \longleftrightarrow f_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 1 \\ \frac{1}{2} & k = -1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases}.$$

Par conséquent,

$$y_k = h_k f_k = \begin{cases} \frac{1}{2(\gamma + i\omega_0)} & k = 1 \\ \frac{1}{2(\gamma - i\omega_0)} & k = -1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases},$$

et la solution particulière est

$$y_p(t) = \Re \left\{ \frac{\exp(i\omega_0 t)}{\gamma + i\omega_0} \right\} = \frac{\gamma \cos \omega_0 t + \omega_0 \sin \omega_0 t}{\omega_0^2 + \gamma^2}. \quad (127)$$

La solution de l'équation homogène qui correspond à (126) est donnée par

$$y_h(t) = c \exp(-\gamma t), \quad c = \text{const.},$$

où  $c$  est fixée par la condition initiale. On trouve alors que

$$y(t) \longrightarrow y_p(t) = y_\infty(t), \quad \text{si } t \gg 1/\gamma.$$

Ceci dit que  $y_p(t)$  est également la *solution stationnaire* de (126) qu'on atteint pour n'importe quelle condition initiale – voir fig. 9.

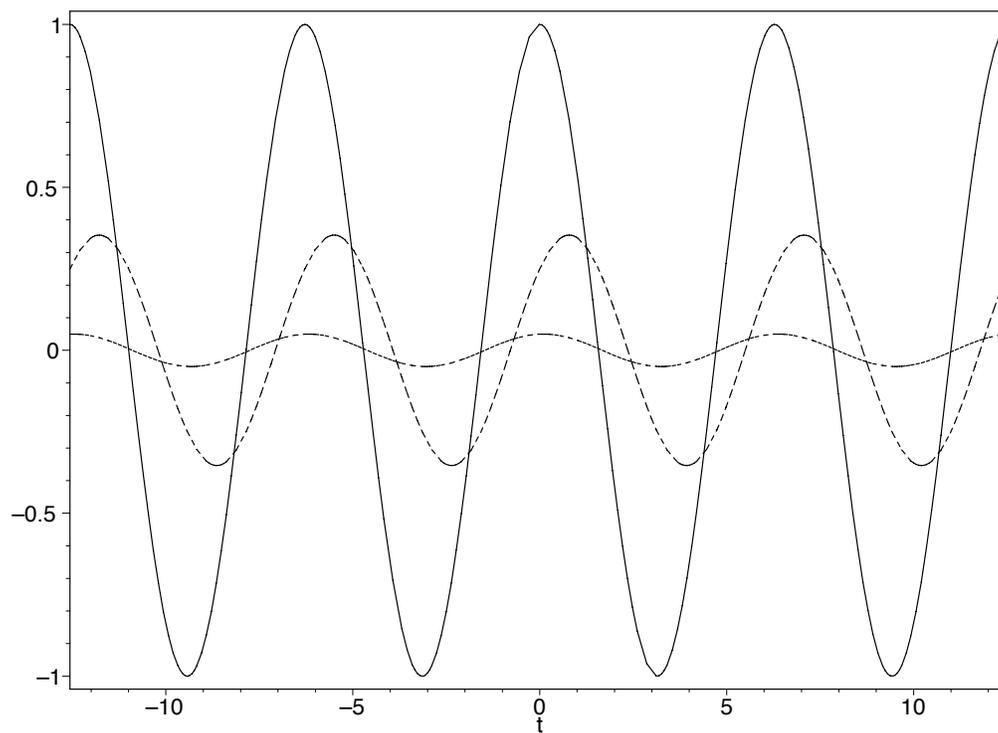


FIGURE 9. La fonction  $f(t) = \cos \omega_0 t$  ("entrée") et la solution stationnaire de l'équation différentielle (126) ("sortie") pour  $\omega_0 = 1$  et  $\gamma = \{1, 10\}$ .

## Chapitre 3

### La transformée de Fourier

#### 1. Dérivation heuristique

Si  $f(t)$  est une fonction périodique (période  $T$ ) qui remplit les conditions de Dirichlet, elle peut être développée en une série de Fourier,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\omega_0 t) \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} d\tau \exp(-in\omega_0 \tau) f(\tau)}_{f_n},$$

où  $\omega_0 = 2\pi/T$ . On considère maintenant la situation où  $T \rightarrow \infty$  et  $f(t)$  devient *apériodique*. Par conséquent,  $\omega_0$  devient un différentiel "infinitésimal",  $\omega_0 \rightarrow d\omega$ , et l'échelle des fréquences devient continue,  $\omega_n = n\omega_0 \rightarrow \omega \in \mathbb{R}$ . Avec  $1/T = \omega_0/2\pi$  on obtient donc

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_0 \exp(in\omega_0 t) \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \exp(-in\omega_0 \tau) f(\tau) \\ &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \exp(-i\omega \tau) f(\tau)}_{\tilde{f}(\omega)}. \end{aligned}$$

On définit (la variable d'intégration  $\tau$  est remplacée par  $t$ )

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) f(t) \quad (128)$$

comme *transformée de Fourier* de  $f(t)$  et

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \tilde{f}(\omega) \quad (129)$$

comme *transformée de Fourier inverse* de  $\tilde{f}(\omega)$ . La transformation de Fourier est une fonction d'intégrale qui dépend du paramètre  $\omega$  et qui existe si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) |f(t)| < \infty. \quad (130)$$

Ceci est une *condition suffisante* pour l'existence de  $\tilde{f}(\omega)$ .

## 2. Distribution de Dirac

**2.1. Définition.** L'application consécutive des transformations  $f(t) \rightarrow \tilde{f}(\omega)$  et  $\tilde{f}(\omega) \rightarrow f(t)$  est une opération neutre,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(i\omega t) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \exp(-i\omega\tau) f(\tau)}_{\tilde{f}(\omega)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(i\omega[t - \tau]) \right\}}_{\delta(t-\tau)} f(\tau). \end{aligned}$$

On en déduit la définition de la *distribution de Dirac*,

$$\delta(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t), \quad (131)$$

qui a la propriété fondamentale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \delta(t - \tau) f(\tau) = f(t), \quad (132)$$

où  $f(t)$  est une fonction quelconque pour laquelle  $|f(t)| < \infty$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées par substitution de la variable  $\omega$  dans la représentation (131) (exercice) :

$$\delta(t) = \delta(-t), \quad (133)$$

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (134)$$

Il y a deux remarques à faire :

- (a)  $\delta(t)$  n'est pas une fonction "normale" mais, comme le peigne de Dirac, il s'agit d'une *distribution*, i.e. de la limite d'une classe de fonctions qui convergent vers  $\delta(t)$ . Éq. (131) doit être interprétée dans ce sens. Cet aspect sera discuté dans les paragraphes suivants.
- (b) Éq. (132) représente la *convolution* de la fonction (apériodique)  $f(t)$  avec  $\delta(t)$  et montre que  $\delta(t)$  est l'élément neutre de la convolution. La distribution  $\delta(t)$  est donc l'équivalent du peigne de Dirac pour la convolution apériodique.

**2.2. Une représentation simple de  $\delta(t)$ .** Regardons la fonction

$$h_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} & |t| \leq \alpha \\ 0 & |t| > \alpha \end{cases} \quad (135)$$

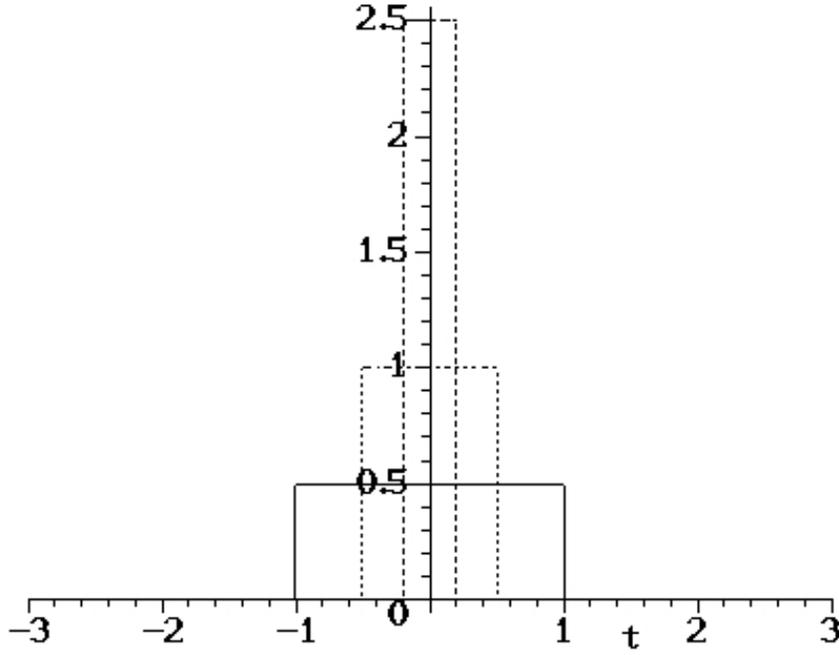


FIGURE 1. La fonction  $h_\alpha(t)$  définie en éq. (135) pour  $\alpha = 1, 0.5, 0.2$ .

qui est normalisée à 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt h_\alpha(t) = 1. \quad (136)$$

$h_\alpha(t)$  est la version non-périodique de  $H_{\alpha,T}(t)$  définie en éq. (94). La transformation de Fourier de  $h_\alpha(t)$  donne

$$\tilde{h}_\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) h_\alpha(t) = \frac{\sin \omega \alpha}{\omega \alpha}. \quad (137)$$

En appliquant la transformation de Fourier inverse on trouve que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} h_\alpha(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \frac{\sin \omega \alpha}{\omega \alpha} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t). \end{aligned}$$

La comparaison avec la représentation (131) de la distribution de Dirac montre que

$$\delta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} h_\alpha(t). \quad (138)$$

On comprend maintenant que  $\delta(t)$  est la limite d'une fonction "normale", la forme (138) étant une représentation possible. Regardons dans ce contexte l'intégrale de convolution

$$\bar{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h_\alpha(t - \tau) f(\tau)$$

de  $h_\alpha(t)$  avec une fonction "lisse" quelconque. A cause de la forme simple de  $h_\alpha(t)$  cette intégrale devient

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{2\alpha} \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} d\tau f(\tau),$$

ce qui montre que  $\bar{f}(t)$  est la moyenne de  $f$  dans l'intervalle  $[t - \alpha, t + \alpha]$ . Dans la limite  $\alpha \rightarrow 0$  cette valeur moyenne est identique avec la valeur de la fonction à  $\tau = t$ ,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{f}(t) = f(t),$$

en accord avec la relation (132).

**2.3. Représentation par une distribution gaussienne.** On considère une gaussienne ("cloche de Gauss"), comme on la connaît de la statistique mathématique (voir fig. 2) :

$$g_\epsilon(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\epsilon^2}\right), \quad \epsilon > 0. \quad (139)$$

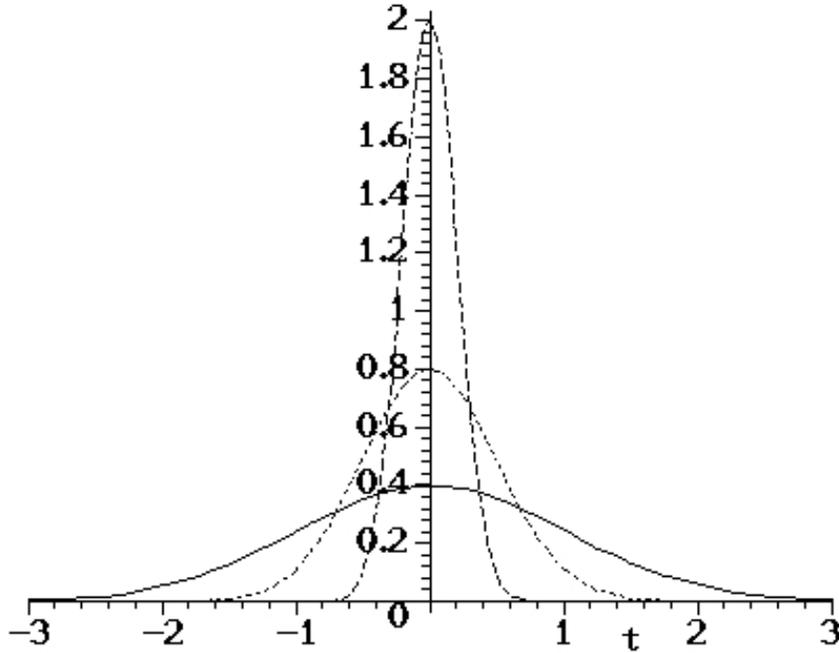
Les gaussiennes  $g_\epsilon(t)$  sont normées à 1 pour n'importe quel  $\epsilon > 0$  (exercice) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\epsilon(t) dt = 1. \quad (140)$$

Calculons maintenant la transformée de Fourier de  $g_\epsilon(t)$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_\epsilon(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) g_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) \exp\left(-\frac{t^2}{2\epsilon^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left(-\frac{t^2 + 2i\epsilon^2\omega t}{2\epsilon^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left(-\frac{(t + i\epsilon^2\omega)^2 + \epsilon^4\omega^2}{2\epsilon^2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\omega^2\epsilon^2}{2}\right) \underbrace{\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left(-\frac{(t + i\epsilon^2\omega)^2}{2\epsilon^2}\right) \right\}}_{=1}. \end{aligned}$$

Pour prouver que l'intégrale dans la dernière ligne équivaut à 1, on introduit la fonction auxiliaire  $G(\alpha) := \int_{-\infty}^{+\infty} dt g_\epsilon(t + i\alpha)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), et on montre que  $G'(\alpha) = 0$ .

FIGURE 2. Gaussiennes normées pour  $\epsilon = 1, 0.5, 0.2$ .

Ceci indique que  $G$  ne dépend pas de  $\alpha$ , et  $G(\alpha) = G(0) = 1$  pour n'importe quel  $\alpha \in \mathbb{R}$  (exercice). On trouve donc la correspondance

$$g_\epsilon(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\epsilon^2}\right) \longleftrightarrow \tilde{g}_\epsilon(\omega) \equiv \exp\left(-\frac{\omega^2\epsilon^2}{2}\right). \quad (141)$$

La largeur de  $\tilde{g}_\epsilon(\omega)$  est  $1/\epsilon$  et donc l'inverse de la largeur de  $g_\epsilon(t)$ . En utilisant que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(i\omega t) \exp\left(-\frac{\omega^2\epsilon^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(i\omega t), \end{aligned}$$

on voit que

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon(t). \quad (142)$$

On a donc vu deux représentations possibles de  $\delta(t)$  : (a) La représentation (138) par une distribution rectangulaire de largeur zéro, et (b) la représentation (142) par une gaussienne de largeur zéro.

### 3. Quelques exemples

EXEMPLE 3.1. On donne les fonctions  $f(t) = \cos \omega_0 t$  et  $g(t) = \sin \omega_0 t$  ( $\omega_0 \in \mathbb{R}$ ) dont on cherche les transformées de Fourier.

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) \underbrace{\left\{ \frac{\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)}{2} \right\}}_{\cos \omega_0 t} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i[\omega - \omega_0]t)}_{2\pi\delta(\omega - \omega_0)} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i[\omega + \omega_0]t)}_{2\pi\delta(\omega + \omega_0)}. \end{aligned}$$

Dans la deuxième ligne on utilise que  $\delta(x) = \delta(-x)$ . La transformée de Fourier de  $\cos \omega_0 t$  est donc donnée par

$$\cos \omega_0 t \longleftrightarrow \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0). \quad (143)$$

Comme  $\sin \omega_0 t = (\exp(i\omega_0 t) - \exp(-i\omega_0 t))/2i$ , on trouve de la même manière

$$\sin \omega_0 t \longleftrightarrow i\pi\delta(\omega + \omega_0) - i\pi\delta(\omega - \omega_0). \quad (144)$$

EXEMPLE 3.2. Soit  $f(t) = \exp(-\gamma|t|) \cos \omega_0 t$  ( $\omega_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma > 0$ ) une fonction qui décrit une oscillation amortie (voir fig. 3). On cherche la transformée de Fourier de  $f(t)$ .

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) \exp(-\gamma|t|) \cos \omega_0 t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cos \omega t \exp(-\gamma|t|) \cos \omega_0 t \\ &= \Re \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) \exp(-\gamma|t|) \left( \frac{\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)}{2} \right) \right\} \\ &= \Re \left\{ \int_0^{\infty} dt \exp(-i\omega t) \exp(-\gamma t) \left( \exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t) \right) \right\} \\ &= \Re \left\{ \int_0^{\infty} dt \exp\left((-i[\omega - \omega_0] - \gamma)t\right) + \int_0^{\infty} dt \exp\left((-i[\omega + \omega_0] - \gamma)t\right) \right\} \\ &= \Re \left\{ \frac{1}{i(\omega - \omega_0) + \gamma} \right\} + \Re \left\{ \frac{1}{i(\omega + \omega_0) + \gamma} \right\} \\ &= \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} + \frac{\gamma}{(\omega + \omega_0)^2 + \gamma^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\exp(-\gamma|t|) \cos \omega_0 t \longleftrightarrow \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} + \frac{\gamma}{(\omega + \omega_0)^2 + \gamma^2}. \quad (145)$$

Ceci est la somme de deux fonctions de Lorentz, l'une centrée sur  $\omega_0$  et l'autre

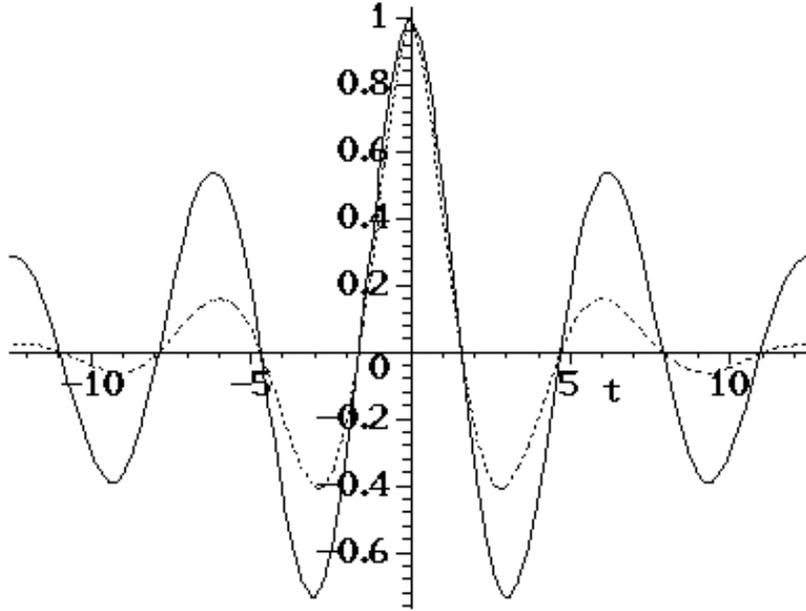


FIGURE 3. La fonction  $f(t) = \exp(-\gamma|t|) \cos \omega_0 t$  pour  $\omega_0 = 1$  et  $\gamma = \{0.1, 0.3\}$ .

centrée sur  $-\omega_0$  (voir fig. 4). Si  $\omega_0 \rightarrow 0$  on obtient alors

$$\exp(-\gamma|t|) \longleftrightarrow \frac{2\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}. \quad (146)$$

L'autre cas limite est  $\omega_0 \neq 0$  et  $\gamma \rightarrow 0$ . Dans ce cas  $f(t) \rightarrow \cos \omega_0 t$ . La transformée de Fourier est donnée par éq. (143), et on peut conclure

$$\delta(\omega \pm \omega_0) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega \pm \omega_0)^2 + \gamma^2},$$

ou, en utilisant une notation plus générale,

$$\delta(x) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{x^2 + \gamma^2}. \quad (147)$$

On trouve alors une troisième représentation de la distribution de dirac. Une remarque dans ce contexte : On voit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt |f(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-\gamma|t|) = \frac{2}{\gamma} < \infty.$$

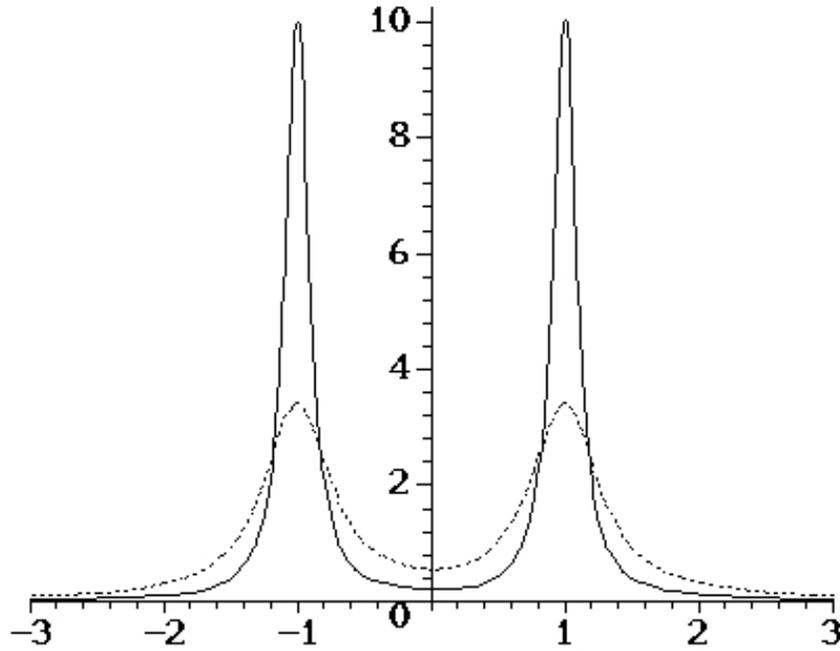


FIGURE 4. Transformée de Fourier de  $f(t) = \exp(-\gamma|t|) \cos \omega_0 t$  pour  $\omega_0 = 1$  et  $\gamma = \{0.1, 0.3\}$ .

Si  $\gamma = 0$  cette intégrale est divergente et la transformée de Fourier de  $\cos \omega_0 t$  n'existe pas d'après la condition (130). La transformée de Fourier de  $\cos \omega_0 t$  donne une distribution et doit être interprétée comme limite de la fonction  $f(t) = \exp(-\gamma|t|) \cos \omega_0 t$  pour  $\gamma \rightarrow 0$ .

#### 4. Règles de calcul

Dans le suivant on donnera quelques règles de calcul pour la transformée de Fourier. Comme pour les séries de Fourier on admet des fonctions complexes  $f : t \in \mathbb{R} \rightarrow f(t) \in \mathbb{C}$ .

**4.1. Linéarité.** On considère deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  dont les transformées de Fourier existent. Soit  $s(t) := \alpha f(t) + \beta g(t)$ , où  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Pour la fonction  $s(t)$  on a la correspondance

$$s(t) := \alpha f(t) + \beta g(t) \longleftrightarrow \tilde{s}(\omega) = \alpha \tilde{f}(\omega) + \beta \tilde{g}(\omega). \quad (148)$$

La preuve est triviale :  $\tilde{s}(\omega)$  est obtenue par l'intégration en éq. (128), où  $f(t) \rightarrow \alpha f(t) + \beta g(t)$ , et l'intégration est une opération linéaire.

**4.2. Fonction complexe conjuguée.** Soit  $f(t)$  une fonction périodique dont la transformée de Fourier existe. Avec (129) on peut alors écrire

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(-i\omega t) \tilde{f}^*(\omega) \\ &\stackrel{u:=-\omega}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} -du \exp(iut) \tilde{f}^*(-u) \\ &\stackrel{\omega:=u}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \tilde{f}^*(-\omega). \end{aligned}$$

Ceci donne la correspondance

$$f^*(t) \longleftrightarrow \tilde{f}^*(-\omega). \quad (149)$$

**4.3. Réflexion  $t \rightarrow -t$ .** Soit  $f(t)$  une fonction complexe dont la transformée de Fourier existe. En utilisant (129) on obtient

$$\begin{aligned} f(-t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(-i\omega t) \tilde{f}(\omega) \\ &\stackrel{u:=-\omega}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} -du \exp(iut) \tilde{f}(-u) \\ &\stackrel{\omega:=u}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \tilde{f}(-\omega). \end{aligned}$$

Ici on obtient la correspondance

$$f(-t) \longleftrightarrow \tilde{f}(-\omega). \quad (150)$$

Comme pour les séries de Fourier on décompose  $f(t)$  en une partie paire,  $f_+(t) = (f(t) + f(-t))/2$ , et une partie impaire,  $f_-(t) = (f(t) - f(-t))/2$ . Pour les transformées de Fourier respectives on a les correspondances

$$f_+(t) \longleftrightarrow \tilde{f}_+(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega) + \tilde{f}(-\omega)}{2}, \quad (151)$$

$$f_-(t) \longleftrightarrow \tilde{f}_-(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega) - \tilde{f}(-\omega)}{2}. \quad (152)$$

A cause de la correspondance (150) les transformées de Fourier  $\tilde{f}_+(\omega)$  et  $\tilde{f}_-(\omega)$  ont les mêmes symétries que  $f_+(t)$  et  $f_-(t)$ , respectivement.

Éq. (128) montre que

$$\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}^*(\omega) \quad \text{si } f(t) \in \mathbb{R}. \quad (153)$$

Si  $f(t)$  est une fonction réelle on obtient avec (151) et (152)

$$\tilde{f}_+(\omega) = \Re\{\tilde{f}(\omega)\}, \quad (154)$$

$$\tilde{f}_-(\omega) = i\Im\{\tilde{f}(\omega)\}. \quad (155)$$

Ceci dit que  $\tilde{f}_+(\omega)$  est paire et purement réelle, et  $\tilde{f}_-(\omega)$  est impaire et purement imaginaire.

**4.4. Transformation d'échelle pour  $t$  ou  $\omega$ .** Soit  $f(t)$  une fonction complexe dont la transformée de fourier existe et  $\gamma \neq 0 \in \mathbb{R}$ . Avec éq. (129) on obtient

$$\begin{aligned} f(\gamma t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega\gamma t) \tilde{f}(\omega) \\ &\stackrel{v=\gamma\omega}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{\gamma} \exp(ivt) \tilde{f}\left(\frac{v}{\gamma}\right), \\ &\stackrel{\omega=v}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{\gamma}\right) \right\}, \end{aligned}$$

d'où la correspondance

$$f(\gamma t) \longleftrightarrow \frac{1}{\gamma} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{\gamma}\right). \quad (156)$$

En posant  $\mu := \gamma^{-1}$ , on en déduit

$$\frac{1}{\mu} f\left(\frac{t}{\mu}\right) \longleftrightarrow \tilde{f}(\mu\omega). \quad (157)$$

**4.5. Translation en  $t$ .** Soit  $f(t)$  une fonction complexe dont la transformée de fourier existe. Si  $t_0 \in \mathbb{R}$  on obtient avec éq. (129)

$$\begin{aligned} f(t + t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega[t + t_0]) \tilde{f}(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \left\{ \exp(i\omega t_0) \tilde{f}(\omega) \right\}, \end{aligned}$$

ou bien

$$f(t + t_0) \longleftrightarrow \exp(i\omega t_0) \tilde{f}(\omega). \quad (158)$$

**4.6. Translation en  $\omega$ .** Soit  $f(t)$  une fonction complexe dont la transformée de fourier existe. Si  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  on obtient avec éq. (128)

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega + \omega_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i[\omega + \omega_0]t) f(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) \left\{ \exp(-i\omega_0 t) f(t) \right\}, \end{aligned}$$

d'où la correspondance

$$f(t) \exp(-i\omega_0 t) \longleftrightarrow \tilde{f}(\omega + \omega_0). \quad (159)$$

**4.7. Différentiation en  $t$ .** On donne une fonction  $f(t) \in \mathbb{C}$  dont la transformé de Fourier existe. La  $n$ -ième dérivée par rapport à  $t$  est alors donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \tilde{f}(\omega) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (i\omega)^n \exp(i\omega t) \tilde{f}(\omega). \end{aligned}$$

On en déduit la correspondance

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \longleftrightarrow (i\omega)^n \tilde{f}(\omega), \quad (160)$$

si la transformée de Fourier inverse de  $\omega^n \tilde{f}(\omega)$  existe.

**4.8. Différentiation en  $\omega$ .** Soit  $f(t) \in \mathbb{C}$  une fonction dont la transformée de Fourier existe. La  $n$ -ième dérivée de la transformée de Fourier par rapport à  $\omega$  est alors donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{d\omega^n} \tilde{f}(\omega) &= \frac{d^n}{d\omega^n} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) f(t) \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt (-it)^n \exp(i\omega t) f(t). \end{aligned}$$

Ceci donne la correspondance

$$t^n f(t) \longleftrightarrow i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \tilde{f}(\omega), \quad (161)$$

si la transformée de Fourier de  $t^n f(t)$  existe.

## 5. Convolution et corrélation

Comme pour les séries de Fourier il existe des théorèmes de convolution et de corrélation pour les fonctions apériodiques.

**5.1. Convolution.** On donne deux fonctions apériodiques  $f(t) \in \mathbb{C}$  et  $g(t) \in \mathbb{C}$  dont les transformées de Fourier existent. La convolution de  $f$  et  $g$  est définie par

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(t - \tau) g(\tau). \quad (162)$$

La substitution  $u(\tau) = t - \tau$  montre que

$$(f * g)(t) = (g * f)(t), \quad (163)$$

i.e. la convolution est commutative.

Le théorème de convolution pour des fonctions apériodiques dit que

$$(f * g)(t) \longleftrightarrow \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega). \quad (164)$$

PREUVE :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t)(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(t - \tau)g(\tau) \right\} \\
 &\stackrel{u=t-\tau}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau g(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp(-i\omega[u + \tau])f(u) \\
 &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau g(\tau) \exp(i\omega\tau)}_{\tilde{g}(\omega)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} du f(u) \exp(i\omega u)}_{\tilde{f}(\omega)} \quad \square
 \end{aligned}$$

La nouvelle variable d'intégration  $u$  dans la deuxième ligne est une fonction de  $t$ .

Remarque : Si  $g(t) = \delta(t)$  on a

$$(f * \delta)(t) \longleftrightarrow \tilde{f}(\omega), \quad (165)$$

car  $\tilde{\delta}(\omega) = 1$ . Ceci est une autre façon d'exprimer que la distribution de Dirac est l'élément neutre de la convolution – voir éq. (132).

**5.2. Corrélation.** On donne deux fonctions a périodiques  $f(t) \in \mathbb{C}$  et  $g(t) \in \mathbb{C}$ , dont les transformées de Fourier existent. La corrélation de  $f$  et  $g$  est définie par

$$(f \circ g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(t + \tau)g^*(\tau). \quad (166)$$

Le théorème de corrélation dit que

$$(f \circ g)(t) \longleftrightarrow \tilde{f}(\omega)\tilde{g}^*(\omega). \quad (167)$$

PREUVE :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t)(f \circ g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(t + \tau)g^*(\tau) \right\} \\
 &\stackrel{u=t+\tau}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau g^*(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp(-i\omega[u - \tau])f(u) \\
 &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau g^*(\tau) \exp(i\omega\tau)}_{\tilde{g}^*(\omega)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} du f(u) \exp(-i\omega u)}_{\tilde{f}(\omega)} \quad \square
 \end{aligned}$$

On remarque que la corrélation n'est pas commutative.

**5.3. Théorème de Parseval.** On donne une fonction a périodique  $f(t) \in \mathbb{C}$  dont la transformée de Fourier existe. D'après (167) l'autocorrélation peut être écrite sous la forme

$$(f \circ f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t)|\tilde{f}(\omega)|^2. \quad (168)$$

En utilisant la définition de la corrélation on obtient pour  $t = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau |f(\tau)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\tilde{f}(\omega)|^2. \quad (169)$$

Ceci est le théorème de Parseval pour les fonctions aperiodiques. A part le facteur  $1/2\pi$  les intégrales de  $|f|^2$  sur  $t$  et de  $|\tilde{f}|^2$  sur  $\omega$  sont identiques.

**5.4. Convolution en  $\omega$ .** Soient  $f(t), g(t)$  deux fonctions complexes dont les transformées de Fourier existent. On considère la convolution de  $\tilde{f}(\omega)$  et  $\tilde{g}(\omega)$ ,

$$(\tilde{f} * \tilde{g})(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \tilde{f}(\omega - \Omega) \tilde{g}(\Omega), \quad (170)$$

i.e. la convolution dans le domaine de  $\omega$ . Par transformation de Fourier inverse on trouve la correspondance

$$f(t)g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} (\tilde{f} * \tilde{g})(\omega). \quad (171)$$

PREUVE :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) (\tilde{f} * \tilde{g})(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \tilde{f}(\omega - \Omega) \tilde{g}(\Omega) \right\} \\ &\stackrel{v=\omega-\Omega}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \tilde{g}(\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} dv \exp(it[v + \Omega]) \tilde{f}(v) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \tilde{g}(\Omega) \exp(it\Omega)}_{g(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dv \tilde{f}(v) \exp(itv)}_{2\pi f(t)} \quad \square \end{aligned}$$

**5.5. Corrélation en  $\omega$ .** Soient  $f(t), g(t)$  deux fonctions complexes dont les transformées de Fourier existent. La corrélation de  $\tilde{f}(\omega)$  et  $\tilde{g}(\omega)$  est donnée par,

$$(\tilde{f} \circ \tilde{g})(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \tilde{f}(\omega + \Omega) \tilde{g}^*(\Omega). \quad (172)$$

La transformation de Fourier inverse donne la correspondance

$$f(t)g^*(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} (\tilde{f} \circ \tilde{g})(\omega). \quad (173)$$

PREUVE :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) (\tilde{f} \circ \tilde{g})(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \tilde{f}(\omega + \Omega) \tilde{g}^*(\Omega) \right\} \\
&\stackrel{v=\omega+\Omega}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \tilde{g}^*(\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} dv \exp(it[v - \Omega]) \tilde{f}(v) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \tilde{g}^*(\Omega) \exp(-it\Omega)}_{g^*(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dv \tilde{f}(v) \exp(itv)}_{2\pi f(t)} \quad \square
\end{aligned}$$

### 5.6. Exemple.

EXEMPLE 3.3 (**Convolution en  $\omega$** ). Soient  $f(t) := \exp(-\gamma|t|)$  ( $\gamma > 0$ ) et  $g(t) := \cos \omega_0 t$  ( $\omega_0 \in \mathbb{R}$ ). On cherche la transformée de Fourier du produit  $h(t) := f(t)g(t)$ . Les transformées de Fourier de  $f$  et  $g$  sont

$$\begin{aligned}
\cos \omega_0 t &\longleftrightarrow \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0), \\
\exp(-\gamma|t|) &\longleftrightarrow \frac{2\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}.
\end{aligned}$$

Si l'on applique le théorème de convolution dans le domaine des fréquences (voir éq. (171)) on obtient

$$\begin{aligned}
f(t)g(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \frac{2\gamma}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2} \left( \pi \delta(\Omega - \omega_0) + \pi \delta(\Omega + \omega_0) \right) \\
&= \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} + \frac{\gamma}{(\omega + \omega_0)^2 + \gamma^2}.
\end{aligned}$$

On retrouve le résultat (145).

## 6. La fonction de Heaviside

**6.1. Définition.** Formellement la fonction de Heaviside est définie comme "primitive" de la distribution de Dirac,

$$\Theta(t) := \int_{-\infty}^t d\tau \delta(\tau), \quad (174)$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \Theta(t). \quad (175)$$

Evidemment  $\Theta(t) = 0$  si  $t < 0$ , et  $\Theta(t) = 1$  si  $t > 0$ . Pour  $t = 0$  on pose  $\Theta(t) = 1/2$  :

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0. \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (176)$$

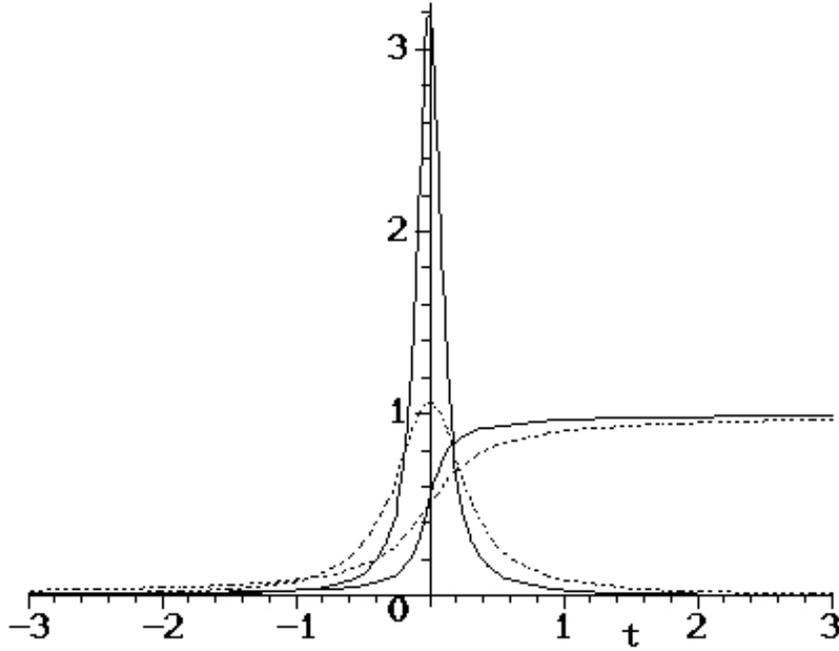


FIGURE 5. Les fonctions  $\delta_\gamma(t)$  et  $\Theta_\gamma(t)$  pour  $\gamma = \{0.3, 0.1\}$  (ligne pointillée et continue).

La définition  $\Theta(0) = 1/2$  vient du fait qu'on intègre sur la "moitié de la distribution de Dirac". Ceci peut être illustré en partant de la forme (147) pour  $\delta(t)$ . L'avantage d'utiliser cette forme est qu'une fonction de Lorentz est différentiable en  $t \in \mathbb{R}$  et sa primitive est une fonction trigonométrique bien connue : On définit (voir fig. 5)

$$\delta_\gamma(t) := \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{t^2 + \gamma^2} \quad (177)$$

$$\Theta_\gamma(t) := \int_{-\infty}^t d\tau \delta_\gamma(\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{t}{\gamma}\right). \quad (178)$$

La fonction de Heaviside est la limite

$$\Theta(t) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \Theta_\gamma(t). \quad (179)$$

Comme  $\arctan(0) = 0$  on trouve que  $\Theta_\gamma(0) = 1/2$  pour n'importe quel  $\gamma > 0$ , et on peut conclure que  $\Theta(0) = 1/2$ .

**6.2. Transformée de Fourier.** Calculons maintenant la transformée de Fourier de  $\Theta(t)$ , qui peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \Theta(t) \exp(-i\omega t) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_0^{\sigma} dt \exp(-i\omega t) \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1 - \exp(-i\omega\sigma)}{i\omega}.\end{aligned}$$

Cette limite n'est pas définie et on considère une définition suivante pour  $\tilde{\Theta}(\omega)$  :

$$\tilde{\Theta}(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} dt \exp(-i\omega t) \exp(-\epsilon t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon + i\omega}.$$

Le facteur  $\exp(-\epsilon t)$  ( $\epsilon > 0$ ) force la convergence de l'intégrale pour tout  $\epsilon > 0$  et on obtient la correspondance

$$\Theta(t) \longleftrightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon + i\omega}. \quad (180)$$

Une autre forme est

$$\Theta(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \mathcal{P}\left(\frac{1}{i\omega}\right), \quad (181)$$

où l'on définit

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{i\omega}\right) := \begin{cases} \frac{1}{i\omega} & \text{si } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{si } \omega = 0 \end{cases}. \quad (182)$$

Pour passer de l'éq. (180) à l'éq. (181) on utilise que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon + i\omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \omega^2} - \frac{i\omega}{\epsilon^2 + \omega^2} \right\} = \pi\delta(\omega) + \mathcal{P}\left(\frac{1}{i\omega}\right).$$

### 6.3. Application.

**EXEMPLE 3.4 (Transformée de Fourier d'un sinus cardinal).** On donne la fonction ("sinus cardinal")

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} \equiv \text{sinc}(t)$$

dont on cherche la transformée de Fourier. On voit que

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} da \cos(at).$$

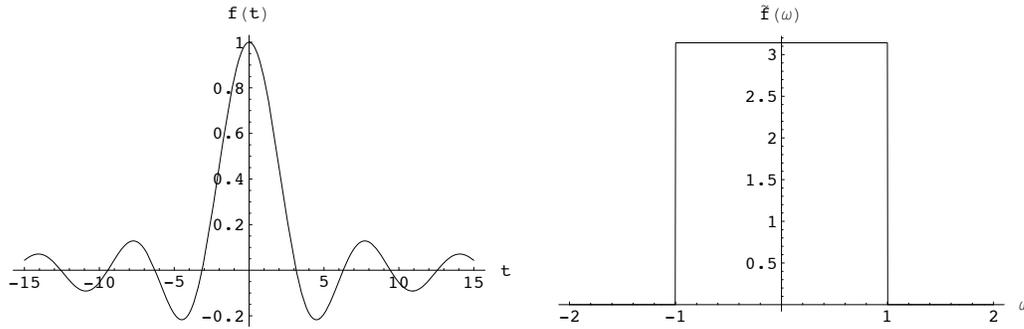


FIGURE 6. Le sinus cardinal (à gauche) et sa transformée de Fourier (à droite).

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} da \cos(at) \right\}}_{f(t)} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} da \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) \cos(at) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} da \{ \pi \delta(\omega - a) + \pi \delta(\omega + a) \} \\
 &= \pi \int_{-1}^{+1} da \delta(\omega + a) \stackrel{\omega+a \rightarrow u}{=} \pi \int_{\omega-1}^{\omega+1} du \delta(u) \\
 &= \pi \left\{ \int_{-\infty}^{\omega+1} du \delta(u) - \int_{-\infty}^{\omega-1} du \delta(u) \right\} = \pi \{ \theta(\omega + 1) - \theta(\omega - 1) \}.
 \end{aligned}$$

Ici on utilise que  $\int_{-1}^{+1} da \delta(\omega - a) = \int_{-1}^{+1} da \delta(\omega + a)$ , ce qu'on montre par la substitution  $a \rightarrow -a$ . La transformée de Fourier de  $f(t)$  s'écrit alors explicitement

$$\tilde{f}(\omega) = \begin{cases} \pi & \text{si } |\omega| < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction  $f(t)$  et sa transformée de Fourier sont montrées dans la figure 6. Par transformée de Fourier inverse on voit facilement que ce résultat est correct,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\omega \exp(i\omega t) = \frac{\sin t}{t} \quad \square$$

La transformée de Fourier joue un rôle important pour le traitement numérique du signal (théorème de Shannon)<sup>1</sup>.

1. voir cours "Traitement numérique du Signal"

## 7. Solution des équations différentielles

**7.1. Le concept.** Nous avons vu qu'on peut facilement exprimer la solution (particulière) d'une équation différentielle ordinaire linéaire sous forme d'une série de Fourier si l'inhomogénéité  $f(t)$  est une fonction périodique dont on connaît les coefficients de Fourier. En utilisant la transformation de Fourier ceci peut être généralisé à des cas où  $f(t)$  est une fonction quelconque (en général non-périodique) dont la transformée de Fourier existe. On considère encore une fois l'équation différentielle

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = f(t). \quad (105)$$

Supposant que la transformé de Fourier  $\tilde{f}(\omega)$  existe, tel que,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \tilde{f}(\omega)$$

et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\omega^k \tilde{y}(\omega)| < \infty$$

pour  $1 \leq k \leq n$ . Dans ce cas

$$\frac{d^k}{dt^k} y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) (i\omega)^k \tilde{f}(\omega)$$

ce qui montre que

$$\frac{d^k}{dt^k} y(t) \longleftrightarrow (i\omega)^k \tilde{y}(\omega).$$

La transformation de Fourier de l'équation (105) donne alors

$$P_n(i\omega) \tilde{y}(\omega) = \tilde{f}(\omega), \quad (183)$$

où  $P_n(z)$  est le polynôme caractéristique

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n.$$

Sachant que  $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$ , où  $y_h(t)$  est la solution de l'équation différentielle 105) avec  $f(t) \equiv 0$ , il suit que

$$\tilde{y}_p(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{P_n(i\omega)}, \quad (184)$$

tel que

$$y_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\tilde{f}(\omega)}{P(i\omega)} \exp(i\omega t). \quad (185)$$

L'évaluation de telles intégrales est facilitée par la méthode des résidus qui va être présentée dans le chapitre 4. Nous avons vu que la forme générale de  $y_h(t)$

est

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{m_k-1} c_{kl} t^l \exp(\lambda_k t).$$

où  $N$  est le nombre de racines différentes du polynôme caractéristique et les  $c_{kl}$  sont des constantes arbitraires qui peuvent être fixées en posant des conditions initiales pour  $y(t)$  et ses dérivées  $y_0^{(k)}(t)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ .

**7.2. Fonction de transfert.** L'équation (184) montre que  $\tilde{y}_p(\omega)$  a la forme

$$\tilde{y}_p(\omega) = \tilde{h}(\omega) \tilde{f}(\omega), \quad (186)$$

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{1}{P_n(i\omega)}. \quad (187)$$

En appliquant le théorème de convolution on voit que

$$y_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h(t-\tau) f(\tau) \quad (188)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{P_n(i\omega)} \exp(i\omega t). \quad (189)$$

On appelle  $h(t)$  la *fonction de transfert*. Si l'équation différentielle (105) décrit un système physique, par exemple circuit électrique, et  $f(t)$  une force extérieure, par exemple une source de tension,  $h(t)$  décrit la transformation de cette force extérieure en une "réponse"  $y_p(t)$  du système. On voit que  $h(t)$  décrit le système et ne dépend pas de  $f(t)$ . Un système qui peut être décrit par une fonction de transfert  $h(t)$  est un *système linéaire*.

D'après éq. (189)  $h(t)$  peut être interprétée comme réponse à une force dont la transformée de Fourier est l'unité. On sait que la distribution de Dirac a cette propriété. Par conséquent  $h(t)$  vérifie l'équation différentielle

$$a_n h^{(n)}(t) + a_{n-1} h^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 h^{(1)}(t) + a_0 h(t) = \delta(t). \quad (190)$$

Ceci est l'équivalent à l'éq. (125) pour les fonctions *non-périodiques*. L'équation différentielle (190) suit aussi par la réflexion suivante. Partant de l'opérateur (par rapport à la définition (115) on indique explicitement l'action sur la variable  $t$ )

$$\mathcal{L}_t := a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$$

il suit de (188) que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t y_p(t) &= \mathcal{L}_t \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h(t - \tau) f(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \{ \mathcal{L}_t h(t - \tau) \} f(\tau) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \delta(t - \tau) f(\tau)}_{=f(t)},\end{aligned}$$

d'où on déduit  $\mathcal{L}_t h(t - \tau) = \delta(t - \tau)$ , où bien

$$\mathcal{L}_t h(t) = \delta(t),$$

ce qui est exactement l'éq. (190).

**7.3. Un exemple.** On considère l'équation différentielle

$$y^{(2)}(t) + \gamma y^{(1)}(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t). \quad (191)$$

ou bien

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = f(t),$$

où  $y \equiv y(t)$ . On pose  $\gamma > 0$  et  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ . La force extérieure n'est pas spécifiée. L'équation (191) décrit par exemple le courant dans un circuit RLC qui est produit par une source de tension  $f(t)$ .

7.3.1. *Fonction de transfert.* Transformation de Fourier et utilisation de la correspondance (160) donne

$$\{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2\} \tilde{y}(\omega) = \tilde{f}(\omega).$$

Ici le polynôme caractéristique a la forme

$$P_2(z) = z^2 + \gamma z + \omega_0^2. \quad (192)$$

Une solution particulière s'écrit alors

$$y_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \tilde{h}(\omega) \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h(t - \tau) f(\tau),$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\omega) &= \frac{1}{P_2(i\omega)} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}, \\ h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\exp(i\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}.\end{aligned}$$

Le calcul de  $h(t)$  est facilité par l'utilisation du théorème des résidus qu'on va discuter dans le chapitre 4. Il est néanmoins possible de calculer  $h(t)$  sans utilisation de ce théorème. On cherche d'abord les zéros du dénominateur de  $\tilde{h}(\omega)$ . L'équation quadratique

$$\omega^2 - i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0$$

a les solutions

$$\omega_{1,2} = \frac{i\gamma}{2} \pm \Omega, \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

$\Omega$  peut être réelle, imaginaire, ou zéro. On utilise maintenant la décomposition en éléments simples de  $\tilde{h}(\omega)$ . Posant

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{-1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = \frac{A}{\omega - \omega_1} + \frac{B}{\omega - \omega_2},$$

on trouve  $A = -1/(2\Omega)$  et  $B = 1/(2\Omega)$ . La transformée de Fourier inverse de  $\tilde{h}(\omega)$  prend alors la forme

$$h(t) = \frac{1}{2\Omega} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\exp(i\omega t)}{\omega - i(\gamma/2) - \Omega} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\exp(i\omega t)}{\omega - i(\gamma/2) + \Omega} \right\}.$$

Dans la première intégrale on substitue  $u = \omega - \Omega$  et dans la deuxième  $u = \omega + \Omega$ . Ceci donne

$$h(t) = \frac{1}{2\Omega} \left\{ -\frac{\exp(i\Omega t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{\exp(iut)}{u - i(\gamma/2)} + \frac{\exp(-i\Omega t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{\exp(iut)}{u - i(\gamma/2)} \right\}.$$

On sait que

$$\Theta(t) \exp(-\epsilon t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\exp(i\omega t)}{\epsilon + i\omega}$$

pour tout  $\epsilon > 0$ . Par conséquent,

$$h(t) = \frac{1}{2\Omega} \left\{ -i\Theta(t) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \exp(i\Omega t) + i\Theta(t) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \exp(-i\Omega t) \right\}.$$

Une forme plus compacte pour  $h(t)$  est

$$h(t) = \Theta(t) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \frac{\sin \Omega t}{\Omega}. \quad (193)$$

On voit que  $h(t)$  est une fonction de transfert *causale*. Comme  $h(t) = 0$  si  $t < 0$ , la solution particulière peut être écrite sous la forme

$$y_p(t) = \int_{-\infty}^t d\tau h(t - \tau) f(\tau),$$

car  $h(t - \tau) = 0$  si  $\tau > t$ . La réponse  $y_p(t)$  ne contient que des contributions de  $f(\tau)$  pour lesquelles  $t \geq \tau$ .

On note que (193) est valable pour tout  $\Omega \in \mathbb{R}$ . Si  $\omega_0^2 < \gamma^2/4$ ,  $\Omega$  devient complexe et on peut écrire  $\Omega = i|\Omega|$ . Dans ce cas  $h(t)$  n'est plus périodique,

$$h(t) = \Theta(t) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \frac{\sinh |\Omega| t}{|\Omega|}. \quad (194)$$

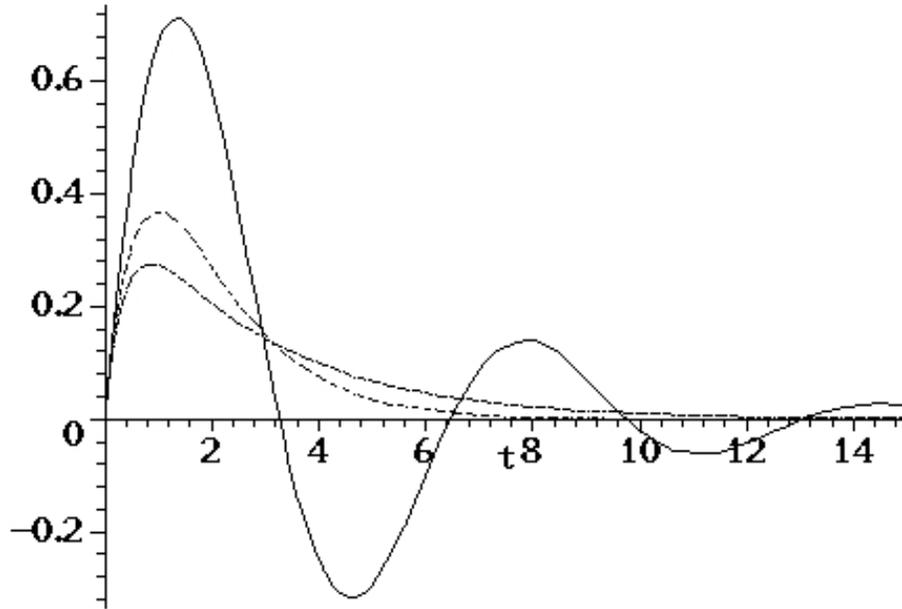


FIGURE 7. La fonction de transfert  $h(t)$  de l'équation différentielle (191). Les paramètres sont  $\omega_0 = 1$  et  $\gamma = 0.5, 2, 3$ .

Dans le cas limite, où  $\Omega = 0$ , on a

$$h(t) = \Theta(t)t \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right). \quad (195)$$

Fig. 7 montre la fonction  $h(t)$  pour  $\omega_0 = 1$  et trois constantes de friction  $\gamma$ , tel que  $\omega_0^2 > \gamma^2/4$ ,  $\omega_0^2 = \gamma^2/4$  et  $\omega_0^2 < \gamma^2/4$ .

7.3.2. *Solution complète.* Afin d'obtenir la solution complète de l'équation différentielle (191) il faut également résoudre l'équation homogène,

$$\frac{d^2 y_h}{dt^2} + \gamma \frac{dy_h}{dt} + \omega_0^2 y_h = 0. \quad (196)$$

Si l'on pose  $y_h(t) = \exp(\lambda t)$  on obtient

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Les zéros sont

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} + i\Omega, \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Au lieu de choisir les fonctions complexes

$$\begin{aligned}\exp(\lambda_1 t) &= \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \exp(i\Omega t), \\ \exp(\lambda_2 t) &= \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \exp(-i\Omega t),\end{aligned}$$

comme base pour  $y_h(t)$  il est plus pratique d'utiliser les combinaisons linéaires réelles

$$\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \cos \Omega t, \quad \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \sin \Omega t.$$

De cette manière  $y_h(t)$  est par construction réelle. On écrit alors

$$\begin{aligned}y(t) &= y_p(t) + y_h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau h(t - \tau) f(\tau) + \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) (C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t),\end{aligned}$$

où  $h(t)$  est donnée par l'éq. (193),  $f(t)$  est une fonction quelconque dont la transformée de Fourier existe, et  $C_{1,2}$  sont des constantes qui sont fixées par les conditions initiales. Posons maintenant

$$f(t) = \Theta(t).$$

Ceci donne

$$y_p(t) = \Theta(t) \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \left\{ \cos \Omega t + \frac{\gamma}{2\Omega} \sin(\Omega t) \right\}}{\omega_0^2} \right].$$

Avec les conditions initiales

$$\begin{aligned}y(0+) &\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} y(\epsilon) = 0, \\ \dot{y}(0+) &\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{y(\epsilon) - y(0)}{\epsilon} = 0,\end{aligned}$$

on obtient  $C_1 = C_2 = 0$ , car  $y_p(0+) = \dot{y}_p(0+) = 0$ . On remarque que les conditions initiales doivent être posées sous la forme ci-dessus parce que  $\dot{y}_p(t)$  "saute" à  $t = 0$ . Comme  $C_1 = C_2 = 0$ , la solution complète est identique avec la solution particulière,

$$y(t) = y_p(t).$$

Fig. 8 montre  $y(t)$  correspondant à la fonction de transfert montrée dans la fig. 7. On voit que dans le cas apériodique limite, où  $\Omega = 0$ ,  $y(t)$  atteint la valeur d'équilibre,  $y(\infty) = 1/\omega_0^2$ , le plus rapidement.

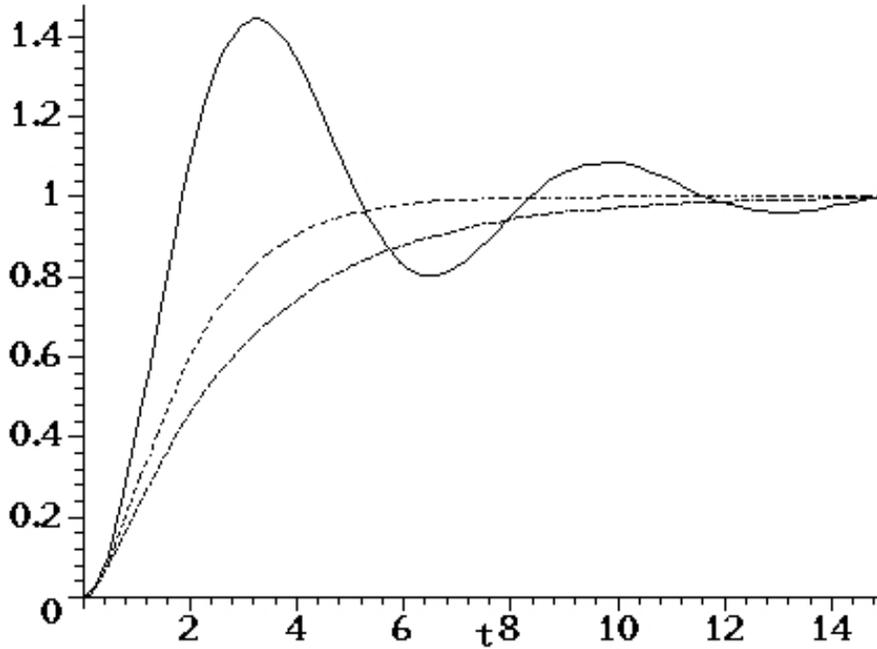


FIGURE 8. La réponse  $y(t)$  de l'équation différentielle (191) pour  $f(t) = \Theta(t)$ . Les conditions initiales sont  $y(0+) = \dot{y}(0+) = 0$  et les paramètres sont  $\omega_0 = 1$ , et  $\gamma = 0.5, 2, 3$ . Les valeurs pour  $\omega_0$  et  $\gamma$  sont les mêmes que dans la fig. 7.

### 8. Transformée de Fourier spatiale

Les applications de la transformée de Fourier, telle qu'elle a été traitée dans les sections précédentes, concernent essentiellement le traitement du signal. Dans différents domaines de la physique, comme la diffraction des rayons X et des neutrons, on a également besoin de la transformée de Fourier spatiale en 3 dimensions. La généralisation de une à trois dimensions ne pose pas de difficultés supplémentaires. On définit la transformée de Fourier d'une fonction  $f(\mathbf{x})$  par

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int d^3x \exp(-i\mathbf{k}^T \cdot \mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \quad (197)$$

où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{k}$  sont des matrices de colonne

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \quad (198)$$

et l'exposant " $T$ " denote une transposition. Avec ceci  $\mathbf{k}^T \cdot \mathbf{x} = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$  est le produit scalaire de  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{x}$ . La transformée de Fourier inverse de  $\tilde{f}(\mathbf{k})$  est donnée par

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \exp(i\mathbf{k}^T \cdot \mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{k}). \quad (199)$$

On utilise ici les notations compactes

$$\int d^3x \dots \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 dx_3 \dots \quad (200)$$

$$\int d^3k \dots \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 dk_2 dk_3 \dots \quad (201)$$



## Chapitre 4

### Eléments de l'analyse complexe.

#### 1. Définition

On considère maintenant des fonctions dont l'ensemble de départ (ensemble de définition) et l'ensemble d'arrivée (l'ensemble des valeurs) sont des domaines dans  $\mathbb{C}$ ,

$$f := \mathbb{D}_1 \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}_2 \subseteq \mathbb{C}. \quad (202)$$

A chaque  $z \in \mathbb{D}_1$  correspond exactement une valeur  $f(z) \in \mathbb{D}_2$ . Si  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) on écrit

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (203)$$

où  $u$  et  $v$  sont des fonctions réelles de  $x$  et  $y$ .

On dit qu'une fonction complexe est *continue* en un point  $z_0 \in \mathbb{D}_1$  si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{si } |z - z_0| < \delta. \quad (204)$$

#### 2. Quelques fonctions élémentaires

**2.1. Exponentielle.** Un exemple pour une fonction complexe est l'exponentielle

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty, \quad (205)$$

pour laquelle  $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}$ . Comme

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy) = \exp(x) \cos(y) + i \exp(x) \sin(y),$$

on trouve que

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \exp(x) \cos(y), \\ v(x, y) &= \exp(x) \sin(y). \end{aligned}$$

On voit que

$$\exp(z_1 \pm z_2) = \exp(z_1) \exp(\pm z_2), \quad (206)$$

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}, \quad (207)$$

$$\exp(z) = \exp(z + 2\pi ik), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (208)$$

**2.2. Le logarithme complexe.** Le logarithme d'un nombre complexe est définie par la relation

$$\exp[\ln(z)] = z. \quad (209)$$

La définition suivante vérifie la relation ci-dessus :

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i(\phi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (210)$$

où  $z = |z|\exp(i\phi)$  et  $z \neq 0$ . Comme  $z = |z|\exp(i\phi) = \exp(i\phi)\exp(i2\pi k)$ , le logarithme n'est pas une fonction univoque, et on définit la *branche principale* par

$$\text{Ln}(z) = \ln(|z|) + i\phi, \quad \phi \in (-\pi, \pi]. \quad (211)$$

Le logarithme complexe permet entre autres de définir le logarithme d'un nombre réel négatif. Si  $z = -2$ , on écrit  $z = 2\exp(i\pi)$ , et par conséquent  $\text{Ln}(-2) = \ln(2) + i\pi$ . Regardons un deuxième exemple :  $z = -i$ . Comme  $\exp(i3\pi/2) = \exp(-i\pi/2)$ , on trouve  $\text{Ln}(-i) = \ln(1) - i\pi/2 = -i\pi/2$ .

**2.3. Puissance complexe.** Pour  $a, z \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , on définit

$$a^z = \exp[z\text{Ln}(a)]. \quad (212)$$

Avec cette définition on trouve pour  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$a^{z_1}a^{z_2} = a^{(z_1+z_2)}. \quad (213)$$

*Preuve :*  $a^{z_1}a^{z_2} = \exp[z_1\text{Ln}(a)]\exp[z_2\text{Ln}(a)] = \exp[(z_1 + z_2)\text{Ln}(a)] = a^{(z_1+z_2)}$ .

De la même manière on trouve que

$$(a^{z_1})^{z_2} = a^{z_1z_2}. \quad (214)$$

*Preuve :*  $(a^{z_1})^{z_2} = (\exp[z_1\text{Ln}(a)])^{z_2} = \exp[z_2z_1\text{Ln}(a)] = a^{z_1z_2}$ .

**2.4. Fonction trigonométriques.** On définit

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (215)$$

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (216)$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cos z \neq 0, \quad (217)$$

$$\cot z = (\tan z)^{-1}, \quad \sin z \neq 0. \quad (218)$$

Quelques règles de calcul :

(1) *Les zéros de  $\cos z$  et  $\sin z$ .*

Avec  $z = x + iy$  on trouve les décompositions

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

On rappelle que  $\cosh x = (\exp[x] + \exp[-x])/2$  et  $\sinh x = (\exp[x] - \exp[-x])/2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Par conséquent

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow y = 0, \quad x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad (219)$$

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow y = 0, \quad x = k\pi. \quad (220)$$

Les zéros de  $\cos z$  et  $\sin z$  sont les mêmes que pour les fonctions réelles correspondantes.

(2) *Formule d'Euler.*

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z. \quad (221)$$

Attention :  $\cos z$  et  $\sin z$  ne sont pas la parties réelle et imaginaire, respectivement, de  $\exp(iz)$ !

(3) *Théorèmes d'addition.*

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad (222)$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \cos z_1 \sin z_2 + \sin z_1 \cos z_2. \quad (223)$$

Ces relations suivent de (221) et (206).

(4) *Relation entre  $\sin z$  et  $\cos z$ .*

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1. \quad (224)$$

On vérifie cette relation en utilisant (222) avec  $z_1 \equiv z$  et  $z_2 \equiv -z_1$ . Ceci donne  $\cos(0) = 1 = \cos^2 z + \sin^2 z$ .

## 2.5. Fonctions hyperboliques. On définit

$$\cosh z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (225)$$

$$\sinh z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (226)$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \cosh z \neq 0, \quad (227)$$

$$\coth z = (\tanh z)^{-1}, \quad \sinh z \neq 0. \quad (228)$$

Quelques règles de calcul :

(1) *Relation avec les fonctions trigonométriques.*

$$\cosh z = \cos(iz), \quad \cos z = \cosh(iz), \quad (229)$$

$$\sinh z = -i \sin(iz), \quad \sin z = -i \sinh(iz) \quad (230)$$

$$\tanh z = -i \tan(iz), \quad \tan z = -i \tanh(iz) \quad (231)$$

$$\coth z = i \cot(iz), \quad \cot z = i \coth(iz). \quad (232)$$

(2) *Les zéros de  $\cosh z$  et  $\sinh z$ .*

Avec  $z = x + iy$  il suit que

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y,$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y.$$

Ceci montre que

$$\cosh z = 0 \Leftrightarrow y = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad x = 0, \quad (233)$$

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow y = k\pi, \quad x = 0. \quad (234)$$

(3) *Théorèmes d'addition.*

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \quad (235)$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2. \quad (236)$$

(4) *Relation entre  $\sinh z$  et  $\cosh z$ .*

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1. \quad (237)$$

On vérifie cette relation en utilisant (235) avec  $z_1 \equiv z$  et  $z_2 \equiv -z_1$ . Ceci donne  $\cosh(0) = 1 = \cosh^2 z - \sinh^2 z$ .

### 3. Différentiation d'une fonction complexe

**3.1. La dérivée d'une fonction complexe.** La définition de la dérivée d'une fonction complexe est la même que pour les fonctions réelles :

$$f'(z_0) \equiv \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (238)$$

On remarque que le chemin  $z \rightarrow z_0$  n'est pas spécifié. Dans un voisinage infinitésimal de  $z_0$  le chemin peut être approximé par

$$z = z_0 + \epsilon \exp(i\phi), \quad (239)$$

où  $\epsilon > 0$  et  $\phi \in [0, 2\pi)$ . Une différence importante par rapport aux fonctions réelles est qu'il y a un nombre infini de directions pour s'approcher de  $z_0$ . Si l'on travaille avec des fonctions réelles, un point  $x_0$  sur l'axe réel peut être atteint par la droite ou par la gauche. On dit qu'une fonction réelle  $f(x)$  est différentiable en un point  $x_0$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (240)$$

Pour les fonctions complexes on demande que la limite (238) ne dépende pas du chemin  $z \rightarrow z_0$ . En utilisant le paramétrage (239) on demande alors que la limite (238) ne dépende pas de  $\phi$ .

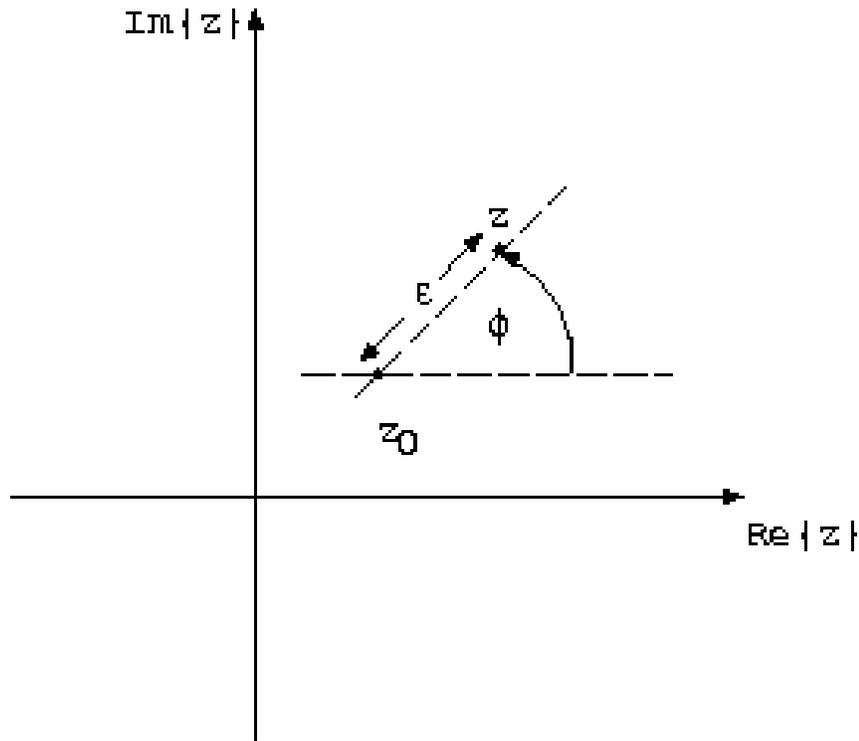


FIGURE 1. Le paramétrage du chemin  $z \rightarrow z_0$  dans le voisinage de  $z_0$ . On pose  $z = z_0 + \epsilon \exp(i\phi)$ .

### 3.2. Equations de Cauchy-Riemann.

THÉORÈME 4.1 (Différentiabilité d'une fonction complexe). Une fonction  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ( $z = x + iy$ ) est différentiable en un point  $z_0$  si et seulement si les équations différentielles de Cauchy-Riemann (CR)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (241)$$

sont vérifiées en ce point (on suppose que toutes les dérivées partielles de  $u$  et  $v$  existent). On appelle une telle fonction *holomorphe* ou *analytique*.

On montre d'abord que les équations de Cauchy-Riemann sont une condition nécessaire pour la différentiabilité de  $f(z)$  dans  $z = z_0$ . La différence  $f(z) - f(z_0)$  a la forme explicite

$$f(z) - f(z_0) = \{u(x, y) - u(x_0, y_0)\} + i\{v(x, y) - v(x_0, y_0)\},$$

où  $z_0 = x_0 + iy_0$  et  $z = x + iy$ . D'après l'éq. (239) la partie réelle et imaginaire de  $z$  sont données par

$$x = x_0 + \epsilon \cos \phi, \quad \text{et} \quad y = y_0 + \epsilon \sin \phi,$$

respectivement. Si  $\epsilon$  est petit on peut approximer

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) \approx du = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0 \underbrace{\epsilon \cos \phi}_{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 \underbrace{\epsilon \sin \phi}_{dy}$$

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) \approx dv = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_0 \underbrace{\epsilon \cos \phi}_{dx} + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_0 \underbrace{\epsilon \sin \phi}_{dy}.$$

L'indice "0" indique que les dérivées partielles sont à évaluer en  $z = z_0$ . Comme  $z - z_0 = \epsilon \exp(i\phi)$  on trouve que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &\equiv f'(z_0, \phi) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0 \epsilon \cos \phi + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 \epsilon \sin \phi \right\} + i \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_0 \epsilon \cos \phi + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_0 \epsilon \sin \phi \right\}}{\epsilon \exp(i\phi)} \\ &= \exp(-i\phi) \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0 \cos \phi + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 \sin \phi \right] + i \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_0 \cos \phi + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_0 \sin \phi \right] \right\}. \end{aligned}$$

La dérivée de  $f(z)$  en  $z = z_0$  est *a priori* une fonction de l'angle  $\phi$ . Si  $f$  est différentiable en  $z = z_0$ , on doit imposer que  $f'(z_0, \phi)$  ne dépend pas de  $\phi$ , ou bien

$$\frac{\partial f'(z_0, \phi)}{\partial \phi} \stackrel{!}{=} 0.$$

Ceci donne la condition

$$\exp(-2i\phi) \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_0 + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_0 - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0 \right) \right\} = 0.$$

Comme  $\exp(-2i\phi) \neq 0$  pour tout  $\phi$ , les équations (241) doivent être vérifiées en  $z = z_0$ . Les équations de Cauchy-Riemann sont donc une condition *nécessaire* pour que  $f(z)$  soit différentiable en  $z = z_0$ . On voit facilement qu'elles sont également une condition *suffisante* pour la différentiabilité de  $f(z)$  en  $z = z_0$ . On écrit

$$f'(z_0, \phi) = \exp(-i\phi) \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0 \cos \phi + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 \sin \phi \right] + i \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_0 \cos \phi + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_0 \sin \phi \right] \right\},$$

et on élimine les dérivées partielles de  $v(x, y)$  à l'aide des équations CR que l'on suppose *données*. Ceci donne

$$\begin{aligned} f'(z_0, \phi) &= \exp(-i\phi) \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0 \underbrace{[\cos \phi + i \sin \phi]}_{\exp(i\phi)} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 \underbrace{[\sin \phi - i \cos \phi]}_{-i \exp(i\phi)} \right\} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0 - i \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0. \end{aligned} \tag{242}$$

Cette expression ne dépend plus de  $\phi$  ! On remarque qu'on peut également éliminer les dérivées partielles de  $u$  dans l'expression pour  $f'(z_0, \phi)$  :

$$\begin{aligned} f'(z_0, \phi) &= \exp(-i\phi) \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_0 \underbrace{[\cos \phi + i \sin \phi]}_{\exp(i\phi)} - \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_0 \underbrace{[\sin \phi - i \cos \phi]}_{-i \exp(i\phi)} \right\} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_0 + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_0. \end{aligned} \quad (243)$$

Comme on suppose les éq. CR données, ce résultat est équivalent à l'expression (242).

EXEMPLE 4.1. Pour illustrer l'application des équations CR. On considère la fonction

$$f(z) = \exp(z) = \underbrace{\exp x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{\exp x \sin y}_{v(x,y)}$$

Les dérivées partielles sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \exp x \cos y, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\exp x \sin y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \exp x \sin y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \exp x \cos y. \end{aligned}$$

Ceci montre que les équations CR sont vérifiées pour n'importe quel  $z_0 \in \mathbb{C}$ , et  $f(z)$  est donc différentiable dans  $\mathbb{C}$ .

#### 4. Intégration d'une fonction complexe

L'intégration d'une fonction complexe est définie comme intégration le long d'un contour orienté  $\gamma(t)$  dans le plan complexe (voir fig. 2). Le contour doit être *paramétré*, i.e. on définit une courbe  $z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , tel que  $z(t_0) = z_0$  et  $z(t_1) = z_1$ . Ici  $t$  est le paramètre de la courbe choisie. On peut imaginer que  $z(t)$  est une courbe en fonction du temps. Toute intégrale dans le plan complexe devient alors une intégrale de chemin :

$$\int_{\gamma} dz f(z) := \int_{t_0}^{t_1} dt \dot{z}(t) f(z(t)). \quad (244)$$

Il est évident que le résultat de l'intégration dépend en général du contour qu'on choisit.

EXEMPLE 4.2. On considère la fonction  $f(z) = z^2$  qu'on intègre le long des contours montrés en fig. 3.

— **Contour A :** On définit  $z(t) = (1+i)t$ , où  $t \in [0, 1]$ . La courbe  $z(t)$  vérifie les conditions  $z(0) = 0$  et  $z(1) = 1+i$ , et  $\dot{z}(t) = 1+i$ . Avec ces définitions

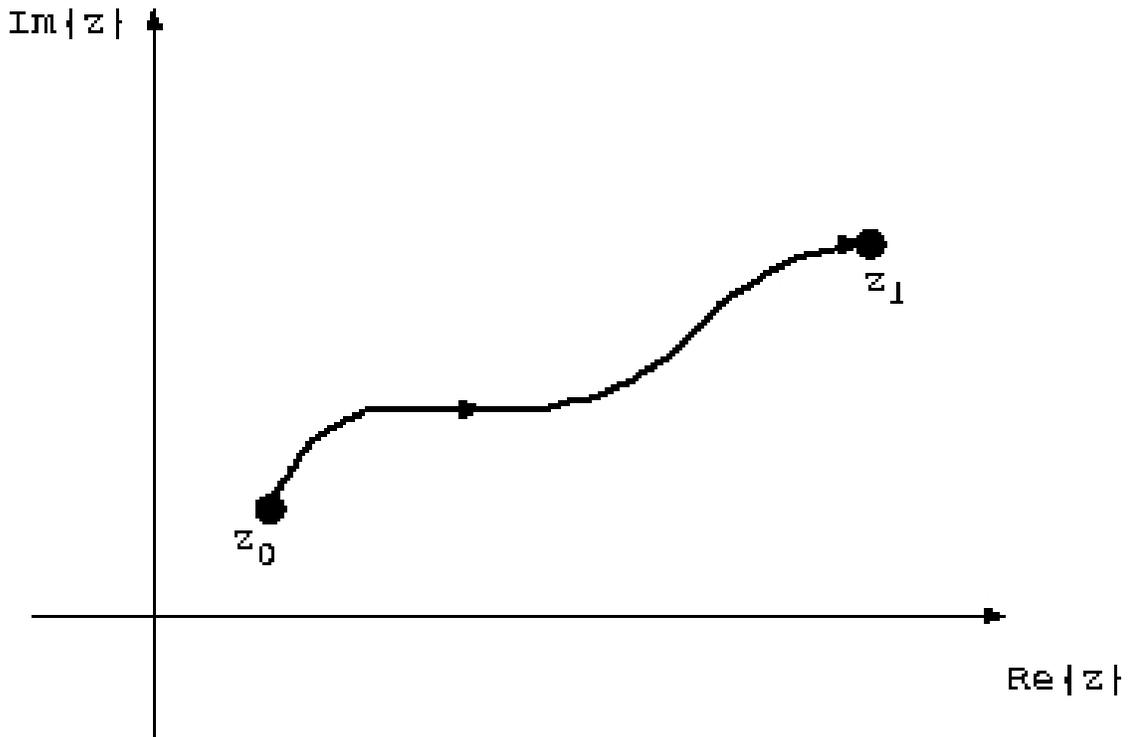


FIGURE 2. Contour d'intégration dans le plan complexe.

on obtient

$$\begin{aligned}
 I_A &:= \int_{\gamma_A} dz f(z) = \int_0^1 dt \underbrace{(1+i)}_{z(t)} \underbrace{\{(1+i)t\}^2}_{z(t)^2} \\
 &= (1+i)^3 \int_0^1 dt t^2 = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{-2+2i}{3}.
 \end{aligned}$$

— **Contour B** : Pour la première partie ( $z = 0 \rightarrow z = 1$ ) on définit  $z_1(t) = t$ ,  $t \in [0, 1]$ , et la deuxième partie ( $z = 1 \rightarrow 1+i$ ) est paramétrée par  $z_2(t) = 1 + it$ ,  $t \in [0, 1]$ . Avec  $\frac{dz_1}{dt} = 1$  et  $\frac{dz_2}{dt} = i$  ceci donne

$$I_B := \int_{\gamma_B} dz f(z) = \int_0^1 dt t^2 + \int_0^1 dt i(1+it)^2 = \frac{-2+2i}{3}.$$

On obtient alors le même résultat que pour le contour A.

On refait les mêmes intégrations pour la fonction  $f(z) = |z|^2$ .

## EXEMPLE 4.3.

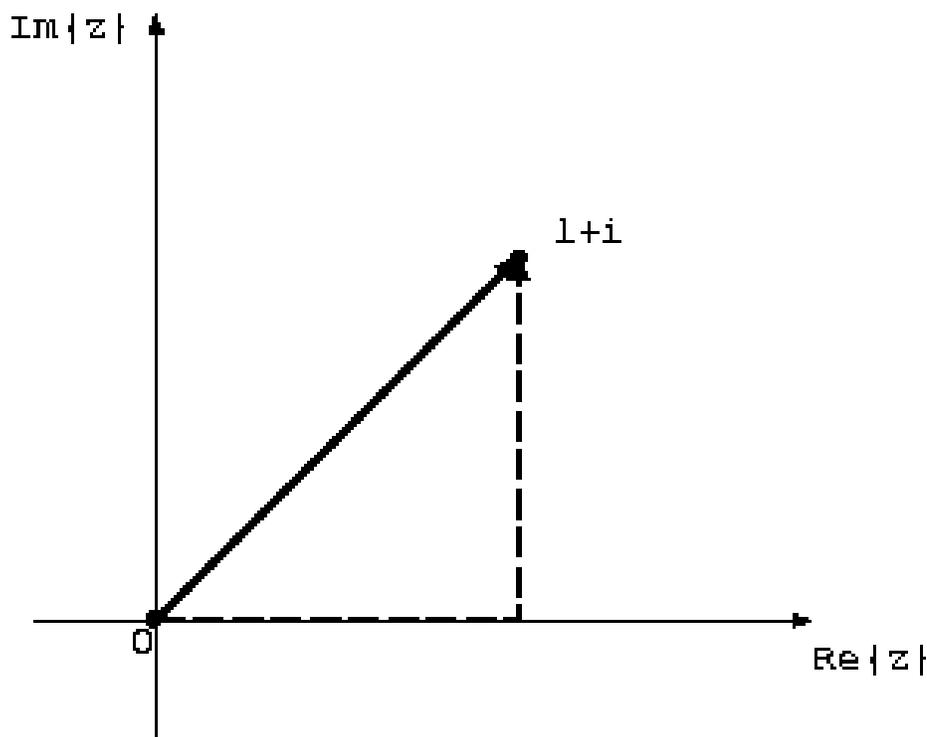


FIGURE 3. Contours d'intégration  $z = 0 \rightarrow z = 1 + i$  pour la fonction  $f(z) = z^2$ . Contour A : ligne continue, contour B : ligne discontinue.

— **Contour A :**

$$\begin{aligned} I_A &:= \int_{\gamma_A} dz f(z) = \int_0^1 dt (1+i) |(1+i)t|^2 \\ &= \int_0^1 dt (1+i) 2t^2 = 2(1+i) \int_0^1 dt t^2 = \frac{2(1+i)}{3}. \end{aligned}$$

— **Contour B :**

$$\begin{aligned} I_B &:= \int_{\gamma_B} dz f(z) = \int_0^1 dt t^2 + \int_0^1 dt i |1+it|^2 \\ &= \int_0^1 dt t^2 + \int_0^1 dt i(1+t^2) = \frac{1+4i}{3}. \end{aligned}$$

Pour la fonction  $f(z) = |z|^2$  les intégrales  $I_A$  et  $I_B$  sont différentes.

### 5. Le théorème de Cauchy

Nous avons vu que la dérivée d'une fonction complexe  $f(z)$  en un point  $z_0$  est définie si les équations CR sont vérifiées en ce point. Dans ce cas uniquement on peut parler de la dérivée  $f'(z_0)$ . Maintenant on peut se poser la question : A quelle condition l'intégrale d'une fonction complexe ne dépend-elle pas du chemin choisi ?

**THÉORÈME 4.2.** L'intégrale d'une fonction complexe ne dépend pas du chemin entre deux points  $z_0$  et  $z_1$  ssi les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées dans le domaine d'intégration et si le domaine est connexe.

**PREUVE :** Partant de la définition (244) de l'intégrale d'une fonction complexe, on écrit

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\gamma} dz f(z) = \int_{t_0}^{t_1} dt \dot{z}(t) f(z(t)) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right) \left( u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) \right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{dx}{dt} u - \frac{dy}{dt} v \right) + i \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{dx}{dt} v + \frac{dy}{dt} u \right), \end{aligned}$$

où  $z = x + iy$  et  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . La partie réelle et la partie imaginaire de l'intégrale  $I$  peuvent être écrites sous forme d'intégrales de chemin des champs vectoriels en  $\mathbb{R}_2$ . En posant

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y, \\ \vec{A}(\vec{r}) &= A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y = u(x, y)\vec{e}_x - v(x, y)\vec{e}_y, \\ \vec{B}(\vec{r}) &= B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y = v(x, y)\vec{e}_x + u(x, y)\vec{e}_y, \end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \Re \{I\} &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{dx}{dt} u - \frac{dy}{dt} v \right) = \int_{t_0}^{t_1} dt \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{A}(\vec{r}(t)), \\ \Im \{I\} &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{dx}{dt} v + \frac{dy}{dt} u \right) = \int_{t_0}^{t_1} dt \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{B}(\vec{r}(t)). \end{aligned}$$

On sait de l'analyse vectorielle que  $\Re \{I\}$  et  $\Im \{I\}$  ne dépendent pas du contour choisi ssi

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x},$$

respectivement. Avec les définitions de  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ , ceci est équivalent à

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \square$$

Une conséquence immédiate du théorème 4.2 est que l'intégrale le long d'un contour fermé est zéro :

THÉORÈME 4.3 (Théorème de Cauchy). Soit  $f : z \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe (analytique) partout dans  $\mathbb{D}$ , et  $\gamma : t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  un contour fermé dans  $\mathbb{D}$ . L'intégrale de  $f(z)$  le long  $\gamma$  est zéro,

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = 0. \quad (245)$$

Il est important que  $f(z)$  est analytique *partout* dans  $\mathbb{D}$ . Regardons l'intégrale de la fonction  $f(z) = 1/z$  pour le contour fermé  $\gamma : z = \exp[it]$ ,  $t \in [0, 2\pi)$  :

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = \int_0^{2\pi} dt \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = 2\pi i.$$

Avec

$$f(z) = \frac{1}{z} = \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{v(x,y)}$$

on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Les équations CR sont vérifiées, à l'exception du point  $z = 0$ , où  $f(z)$  est singulière. C'est cette exception qui fait que l'intégrale la long du contour fermé  $\gamma$  n'est pas zéro.

## 6. La formule fondamentale de l'analyse complexe

Pour dériver la formule fondamentale de l'analyse complexe on a besoin du théorème suivant qui est une conséquence du théorème de Cauchy :

THÉORÈME 4.4. Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans un domaine  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$  non-connexe. Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux contours fermés quelconques dans  $\mathbb{D}$ , il suit que

$$\oint_{\gamma_1} dz f(z) = \oint_{\gamma_2} dz f(z). \quad (246)$$

PREUVE : On considère les contours fermés  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de la figure 4 qui contournent deux "trous" dans le domaine  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ . En revanche, les contours fermés  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ne contournent pas de points exclus. Par conséquent

$$\oint_{\omega_1} dz f(z) + \oint_{\omega_2} dz f(z) = \oint_{\gamma_2} dz f(z) - \oint_{\gamma_1} dz f(z) = 0 \quad \square$$

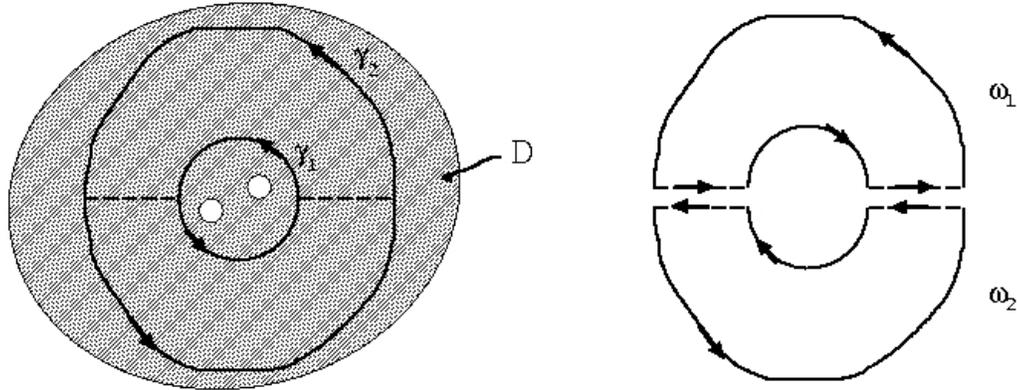


FIGURE 4. Les contours pour démontrer le théorème 4.4 (voir texte).

Ici on a utilisé que les intégrales le long des segments communs (lignes pointillées dans la fig. 4) s'anulent. On peut maintenant démontrer une identité qui est fondamentale pour l'analyse complexe :

**THÉORÈME 4.5** (Théorème fondamental de l'analyse complexe). Soient  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$  un domaine connexe dans  $\mathbb{C}$ ,  $f(z)$  une fonction holomorphe dans  $\mathbb{D}$ , et  $\gamma$  un contour fermé dans  $\mathbb{D}$ . Il suit que pour tout point  $z$  à l'intérieur du contour  $\gamma$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}. \quad (247)$$

**PREUVE :** On définit d'abord un deuxième contour  $\omega : \zeta(t) = z + \epsilon \exp[it]$ ,  $\epsilon > 0$ , à l'intérieur du contour  $\gamma$  (voir fig. 5). En utilisant le théorème 4.4 on peut écrire

$$\oint_{\gamma} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \oint_{\omega} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Avec ceci on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\omega} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} dt \dot{\zeta}(t) \frac{f(\zeta(t))}{\zeta(t) - z} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt f(z + \epsilon \exp[it]) \end{aligned}$$

pour n'importe quel contour fermé  $\gamma$  dans  $\mathbb{D}$ . Le résultat est valable pour tout rayon  $\epsilon > 0$  et on peut faire tendre  $\epsilon$  vers zero :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt f(z + \epsilon \exp[it]) = f(z) \quad \square$$

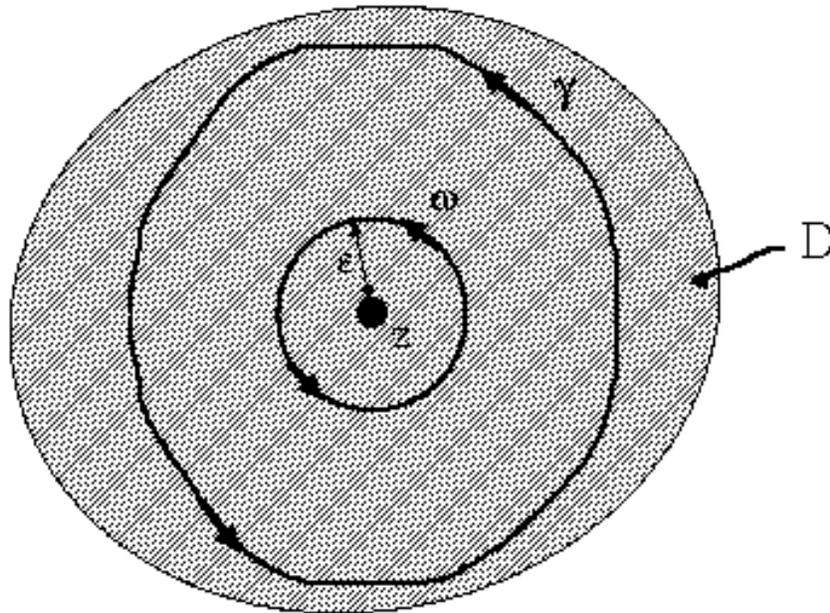


FIGURE 5. Contours d'intégration pour la démonstration du théorème 4.5.

On remarque que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt f(z + \epsilon \exp[it]). \quad (248)$$

Ceci est un résultat étonnant qui dit qu'on obtient la valeur d'une fonction holomorphe au centre d'un cercle quelconque en moyennant la fonction sur le cercle. Pour cette raison on appelle la relation (248) le *théorème de la valeur moyenne* des fonctions holomorphes.

EXEMPLE 4.4. On considère l'intégrale

$$I := \oint_{|z|=3} dz \frac{\exp z}{z^2 + 2z}.$$

$I$  peut être obtenue en utilisant l'identité (247). On change la variable d'intégration de  $z$  à  $\zeta$  et on écrit

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_{|\zeta|=3} d\zeta \frac{\exp \zeta}{\zeta^2 + 2\zeta} \\
 &= \frac{1}{2} \oint_{|\zeta|=3} d\zeta \frac{\exp \zeta}{\zeta} - \frac{1}{2} \oint_{|\zeta|=3} d\zeta \frac{\exp \zeta}{\zeta + 2} \\
 &= \frac{1}{2} \oint_{|\zeta|=3} d\zeta \frac{\exp \zeta}{\zeta - z} \Big|_{z=0} - \frac{1}{2} \oint_{|\zeta|=3} d\zeta \frac{\exp \zeta}{\zeta - z} \Big|_{z=-2} \\
 &= 2\pi i \left( \frac{1}{2} \exp(0) - \frac{1}{2} \exp(-2) \right) = \pi i (1 - e^{-2}).
 \end{aligned}$$

EXEMPLE 4.5. On change le rayon du contour dans l'exemple précédent

$$I := \oint_{|z|=1} dz \frac{\exp z}{z^2 + 2z}.$$

Maintenant on obtient

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_{|\zeta|=1} d\zeta \frac{\exp \zeta}{\zeta^2 + 2\zeta} \\
 &= \frac{1}{2} \oint_{|\zeta|=1} d\zeta \frac{\exp \zeta}{\zeta} - \underbrace{\frac{1}{2} \oint_{|\zeta|=1} d\zeta \frac{\exp \zeta}{\zeta + 2}}_{=0} = \frac{1}{2} \oint_{|\zeta|=1} d\zeta \frac{\exp \zeta}{\zeta - z} \Big|_{z=0} = \pi i.
 \end{aligned}$$

Comme  $z = -2$  est à l'extérieur du contour  $|\zeta| = 1$  la fonction  $(\exp \zeta)/(\zeta + 2)$  est holomorphe à l'intérieur du contour  $|\zeta| = 1$ , et l'intégrale donne zéro.

## 7. Séries de Taylor et de Laurent

### 7.1. Séries de Taylor.

THÉORÈME 4.6 (Séries de Taylor). Soient  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$  un domaine connexe dans  $\mathbb{C}$ ,  $f(z)$  une fonction holomorphe dans  $\mathbb{D}$ , et  $\gamma$  un contour fermé dans  $\mathbb{D}$ . Pour deux points  $z, z_0 \in \mathbb{D}$ ,  $f(z)$  peut être représentée sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (249)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \quad (250)$$

Si  $\gamma$  est réalisé par un cercle autour de  $z_0$ , on appelle la valeur maximale pour le rayon de  $\gamma$  le *rayon de convergence* de la série (249) (voir fig. 6).

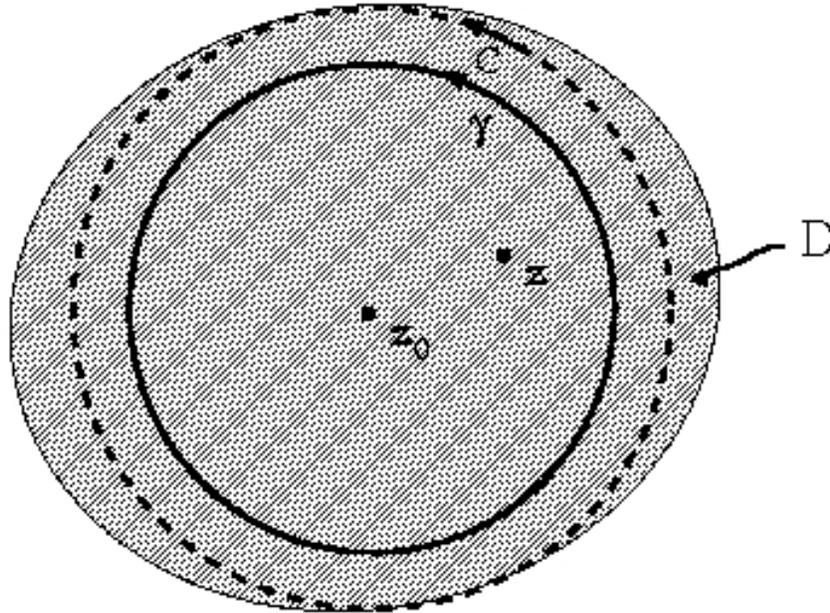


FIGURE 6. Domaine de convergence d'une série de Taylor pour un développement autour de  $z_0$ .

PREUVE : On part de l'identité fondamentale (247), qu'on écrit sous la forme (voir fig. 6)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}.$$

Comme  $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$  sur le contour  $C$  on peut écrire

$$\frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n.$$

Ici on utilise que

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}, \quad \text{si } |q| < 1.$$

Avec les identités ci-dessus on peut donc écrire

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Les intégrales ci-dessus ne dépendent pas du chemin choisi, à condition qu'il reste entièrement dans  $\mathbb{D}$ . Si  $\gamma$  est un contour fermé quelconque dans  $\mathbb{D}$ , il suit que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}}_{c_n} \quad \square$$

Une propriété intéressante des fonctions holomorphes est qu'on peut exprimer leurs dérivées par des intégrales de la même fonction. Il suit de l'équation (249) que

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

et la comparaison avec (250) montre que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \quad (251)$$

Pour  $n = 0$  on retrouve le théorème fondamental (247). La relation (251) montre aussi que les fonctions holomorphes possèdent des dérivées de tout ordre.

## 7.2. Séries de Laurent.

**THÉORÈME 4.7 (Séries de Laurent).** Soient  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$  un domaine non-connexe dans  $\mathbb{C}$ ,  $f(z)$  une fonction holomorphe dans  $\mathbb{D}$ . Pour tout point  $z_0$  à l'intérieur de la partie exclue de  $\mathbb{D}$ ,  $f(z)$  peut être représentée sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (252)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad (253)$$

où  $\gamma$  est un contour fermé à l'intérieur de  $\mathbb{D}$  et  $z \in \mathbb{D}$ . Si  $\gamma$  est réalisé par un cercle autour de  $z_0$ , on appelle la valeur maximale pour le rayon de  $\gamma$  le *rayon de convergence*, et la valeur minimale le *rayon de divergence* de la série (252) (voir fig. 7).

**PREUVE :** On utilise les contours  $C_{1,2}$  et  $\omega_{1,2}$  montrés dans la fig. 7. D'après le théorème fondamental 4.5 on peut écrire

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\omega_1} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\omega_2} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}_{=0} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}. \end{aligned}$$

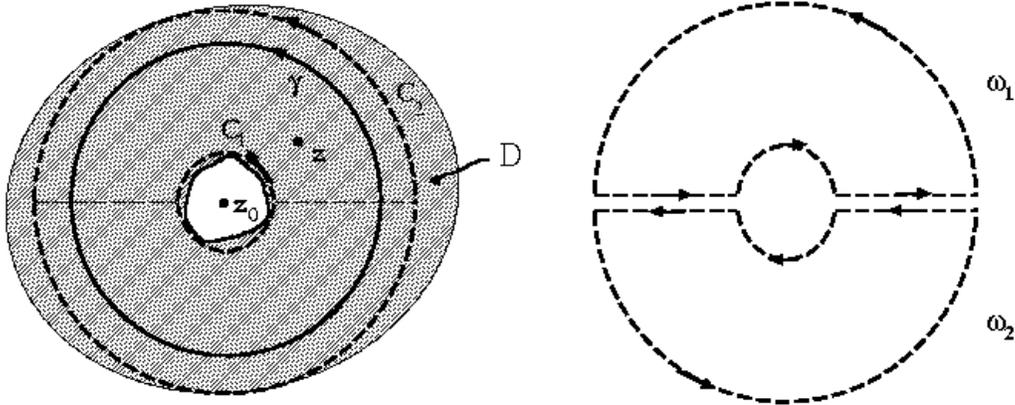


FIGURE 7. A gauche : Domaine de convergence d'une série de Laurent pour un développement autour de  $z_0$ . A droite : Les contours utilisés pour démontrer le théorème 4.7 (voir texte).

L'intégrale sur  $\omega_2$  donne zéro parce que  $f(\zeta)/(z - \zeta)$  est holomorphe partout à l'intérieur de  $\omega_2$ . Comme les intégrales le long des parties communes de  $\omega_1$  et  $\omega_2$  s'annulent, il suit que  $\oint_{\omega_1} + \oint_{\omega_2} = \oint_{C_2} - \oint_{C_1}$ . On définit maintenant  $C_1$  :  $|\zeta - z_0| = r$  et  $C_2$  :  $|\zeta - z_0| = R$ . Sur  $C_2$  on a  $|z - z_0| < |\zeta - z_0| = R$ , et par conséquent

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n.$$

En revanche, sur  $C_1$  on a  $|z - z_0| > |\zeta - z_0| = r$ ,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n.$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^{-(n+1)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} d\zeta f(\zeta) (\zeta - z_0)^n. \end{aligned}$$

Si l'on change l'indice de sommation dans la deuxième somme de  $n$  à  $m = -(n+1)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^{-(n+1)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} d\zeta f(\zeta) (\zeta-z_0)^n \\ = \sum_{m=-1}^{-\infty} (z-z_0)^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}. \end{aligned}$$

Dans cette somme on peut encore une fois changer l'indice de sommation,  $m \rightarrow n$ , et inverser l'ordre de sommation. Pour tout  $z$  avec  $r < |z-z_0| < R$  la fonction  $f(z)$  peut donc être écrite sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.$$

Au lieu d'utiliser des contours  $C_1$  et  $C_2$  différents, on peut choisir le même contour  $\gamma$  dans les deux sommes ci-dessus, à condition que  $r < |\zeta-z_0| < R$ . Ceci est une conséquence du théorème fondamental 4.5. Il suit alors que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \quad \square$$

## 8. Calcul de résidus

### 8.1. Théorème de résidus.

THÉORÈME 4.8. Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans un domaine non-connexe  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$  et  $z_0$  un point dans la partie exclue de  $\mathbb{D}$ . Il suit que

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i c_{-1}, \quad (254)$$

où  $c_{-1}$  est le coefficient pour l'indice  $n = -1$  de la série de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

On appelle  $c_{-1}$  le *résidu* de  $f(z)$ .

PREUVE : On choisit d'abord un contour fermé autour de  $z_0$ , qui est défini par  $\omega : z(t) = z_0 + a \exp[it]$  ( $a > 0$ ),  $t \in [0, 2\pi)$ . On trouve que

$$\begin{aligned} \oint_{\omega} dz (z-z_0)^n &= \int_0^{2\pi} dt \dot{z}(t) (z(t)-z_0)^n \\ &= ia^{n+1} \int_0^{2\pi} dt \exp(i[n+1]t) = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

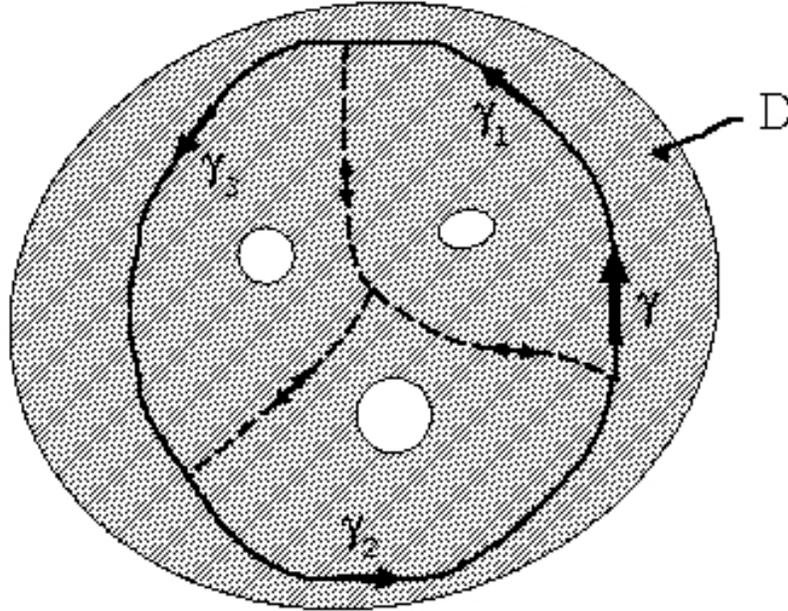


FIGURE 8. Contours d'intégration pour démontrer la relation (255). La superposition des intégrales le long de  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  donne l'intégrale pour le contour  $\gamma$ , parce que les intégrales le long des parties communes à l'intérieur s'anulent.

A cause du théorème 4.4 ce résultat est valable pour n'importe quel contour fermé  $\gamma$ . Par conséquent

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \oint_{\gamma} dz (z - z_0)^n = 2\pi i c_{-1} \quad \square$$

Si  $\mathbb{D}$  contient plusieurs parties (distinctes) exclues,  $\mathbb{G}_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ), éq. (254) peut être généralisée par

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = \sum_{\alpha} 2\pi i c_{-1}^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (255)$$

où  $c_{-1}^{(\alpha)}$  est le résidu qui correspond à un contour d'intégration qui n'entoure que  $\mathbb{G}_{\alpha}$ . On montre l'identité (255) en choisissant autour de chaque domaine  $\mathbb{G}_{\alpha}$  des contours  $\gamma_{\alpha}$  montrés en fig. 8. Les intégrales le long des parties communes s'annulent et on garde le contour  $\gamma$  qui entoure tous les domaines exclus.

**8.2. Calcul de résidus pour une fonction singulière.** Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans un domaine non-connexe  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$  dont la partie exclue consiste en un seul point,  $z_0$ , dans la partie exclue de  $\mathbb{D}$ . On dit que  $f(z)$  est singulière en  $z_0$ . Les singularités d'une fonction peuvent être classifiées comme suivant :

- (1) Une fonction  $f(z)$  a un *pôle simple* en  $z = z_0$  si la série de Laurent a la forme

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots, \quad (256)$$

i.e. si tous les coefficients de Laurent sont nuls pour  $n < -1$ .

- (2) Une fonction  $f(z)$  a un *pôle de multiplicité  $m$*  à  $z = z_0$  si la série de Laurent a la forme

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots, \quad (257)$$

i.e. si tous les coefficients de Laurent sont nuls pour  $n < -m$ .

- (3) Une fonction  $f(z)$  a une *singularité essentielle* à  $z = z_0$  si

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad c_n \neq 0 \quad \text{si} \quad n \rightarrow -\infty. \quad (258)$$

Les équations (256) et (257) montrent que le calcul de  $c_{-1}$  est très simple si  $f(z)$  n'a pas de singularité essentielle en  $z = z_0$  :

$$c_{-1} \equiv \text{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \right\}, \quad (259)$$

où  $m$  est la multiplicité du pôle.

### 8.3. Calcul des transformées de Fourier inverses.

EXEMPLE 4.6. On donne la fonction

$$f(t) = \Theta(t) \exp(-\eta t), \quad \eta > 0,$$

dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\eta + i\omega}.$$

Nous avons utilisé ce résultat afin de trouver la transformée de Fourier de  $\Theta(t)$ . Dans ce cas on considère la limite  $\eta \equiv \epsilon \rightarrow 0$  (voir section 6.2). Connaissant  $\tilde{f}(\omega)$ , on peut donc écrire

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\exp(i\omega t)}{\eta + i\omega}.$$

Une telle intégrale peut être évaluée par la méthode des résidus. Ceci permet souvent de calculer la transformée inverse d'une fonction  $\tilde{f}(\omega)$

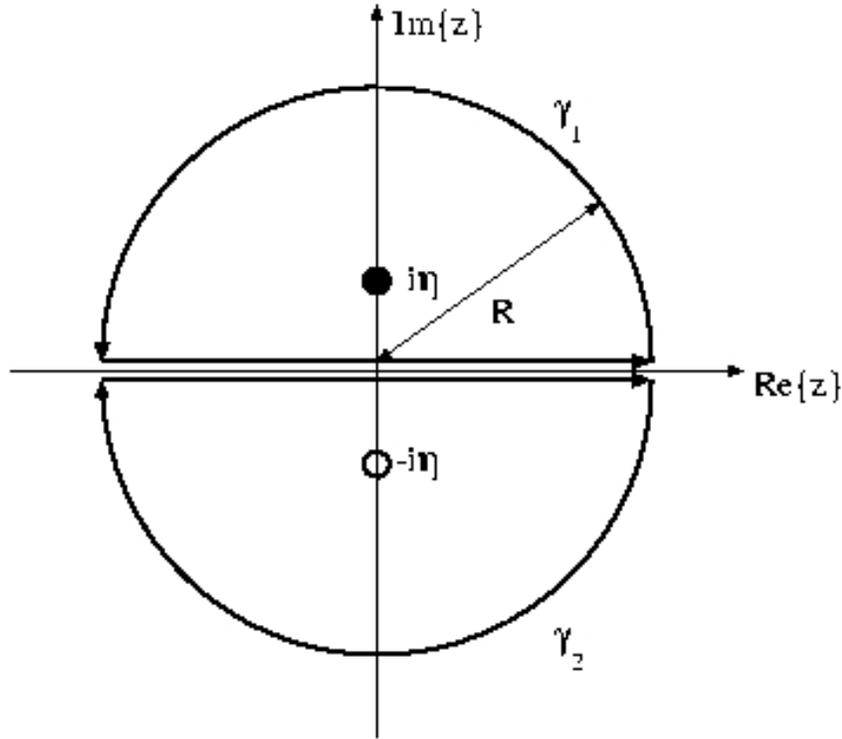


FIGURE 9. Contours d'intégration pour le calcul des transformées de Fourier inverses dans les exemples 4.6 et 4.7.

donnée (évidemment *sans* connaître  $f(t)$  auparavant). Dans nôtre exemple on considère les intégrales

$$I_k := \oint_{\gamma_k} dz \frac{\exp(izt)}{\eta + iz} \equiv \oint_{\gamma_k} dz G(z)$$

pour les contours  $\gamma_1, \gamma_2$  montrés en fig. 9.  $G(z)$  a un pôle simple a  $z = i\eta$ , donc

$$I_1 = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i\eta} \left\{ (z - i\eta) \frac{\exp(izt)}{\eta + iz} \right\} = 2\pi \exp(-\eta t).$$

En revanche

$$I_2 := \oint_{\gamma_2} dz G(z) = 0,$$

car  $G(z)$  est holomorphe partout dans le domaine d'intégration pour  $\gamma_2$  qui ne contient pas de singularités. Maintenant on décompose les contours  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  en une partie de  $z = -R$  à  $z = +R$  le long l'axe réel et un demicercle de rayon  $R$  qui ferme le contour respectif (voir fig. 9). Si  $z$  est interprété comme fréquence complexe,  $z = \omega + i\eta$ ,

Dans la limite  $R \rightarrow \infty$  les parties pour lesquelles  $\Im\{z\} = 0$  sont proportionnelles à l'intégrale qu'on souhaite calculer. Si l'on fait tendre  $R \rightarrow \infty$  on doit impérativement choisir  $\gamma_1$  si  $t > 0$  et  $\gamma_2$  si  $t < 0$  : On écrit  $\exp(iz) = \exp(i[z' + iz'']t) \exp(iz't) \exp(-z''t)$ , où  $z' = \Re\{z\}$  et  $z'' = \Im\{z\}$ .

EXEMPLE 4.7. On considère maintenant la fonction

$$f(t) = \exp(-\eta|t|), \quad \eta > 0.$$

D'après l'exemple 3.2 la transformée de Fourier de  $f(t)$  est donnée par

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{2\eta}{\eta^2 + \omega^2},$$

et par conséquent

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{2\eta}{\eta^2 + \omega^2} \exp(i\omega t).$$

Comme dans l'exemple précédent on imagine ne pas connaître  $f(t)$ , mais sa transformée de Fourier. Afin d'obtenir  $f(t)$  on calcule d'abord les intégrales

$$I_k := \oint_{\gamma_k} dz \frac{2\eta \exp(izt)}{\eta^2 + z^2} \equiv \oint_{\gamma_k} dz G(z)$$

pour les contours  $\gamma_1, \gamma_2$  montrés en fig. 9. Les pôles sont ici  $z_{1,2} = \pm i\eta$ , et par conséquent les contours  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  incluent le pôles  $i\eta$  et  $-i\eta$ , respectivement. En appliquant le théorème de résidus on obtient

$$I_1 = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i\eta} \left\{ (z - i\eta) \frac{2\eta \exp(izt)}{\eta^2 + z^2} \right\} = 2\pi \exp(-\eta t),$$

$$I_2 = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -i\eta} \left\{ (z + i\eta) \frac{2\eta \exp(izt)}{\eta^2 + z^2} \right\} = 2\pi \exp(\eta t).$$

Dans la limite  $R \rightarrow \infty$  on doit choisir le contour  $\gamma_1$  si  $t > 0$  et  $\gamma_2$  si  $t < 0$ . En même temps les contributions des demicercles dans la figure 9 deviennent nulles, et on obtient  $f(t) = I_1/2\pi$  si  $t \geq 0$  et  $f(t) = I_2/2\pi$  si  $t < 0$ ,

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-\eta t), & t \geq 0 \\ \exp(\eta t), & t < 0 \end{cases},$$

ou bien  $f(t) = \exp(-\eta|t|)$ .

## Chapitre 5

### La transformation de Laplace

#### 1. Transformée de Laplace et transformée inverse

Dans la suite on considère des fonctions (réelles ou complexes)  $f(t)$  qui vérifient  $f(t) \equiv 0$  si  $t < 0$ . On peut donc écrire

$$f(t) = \Theta(t)f(t). \quad (260)$$

La transformée de Laplace d'une fonction  $f(t)$  est définie par

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} dt \exp(-st)f(t), \quad (261)$$

où  $s$  est une variable *complexe* dont la partie réelle est positive ou nulle,

$$s \in \mathbb{C}, \quad \Re\{s\} \geq 0. \quad (262)$$

Dans la suite on utilisera également la notation

$$\mathcal{L}\{f(t), t, s\} \equiv \hat{f}(s). \quad (263)$$

La transformation de Laplace est une *transformation d'intégrale*, et la fonction (intégrale) résultante est une fonction de la nouvelle variable  $s$ . Si l'on écrit

$$s = s_0 + i\omega, \quad s_0 > 0, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (264)$$

on obtient

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} dt \exp(-i\omega t) \underbrace{\{f(t) \exp(-s_0 t)\}}_{g(t; s_0)} = \tilde{g}(\omega; s_0), \quad (265)$$

i.e.  $\hat{f}(s)$  apparaît comme la transformée de Fourier de

$$g(t; s_0) = f(t) \exp(-s_0 t).$$

L'existence de  $\tilde{g}(\omega; s_0)$  est garantie si  $\int_0^{\infty} dt |g(t; s_0)| < \infty$  ou, explicitement, si

$$\int_0^{\infty} dt |f(t) \exp(-s_0 t)| < \infty. \quad (266)$$

Ici  $s_0$  est un paramètre qui est à notre disposition. Ceci montre que la transformée de Laplace existe même pour les exponentielles  $f(t) = \exp(at)$ , où  $a > 0$ . Il suffit de choisir  $\Re\{s\} \equiv s_0 > a$  pour que  $\hat{f}(s)$  existe.

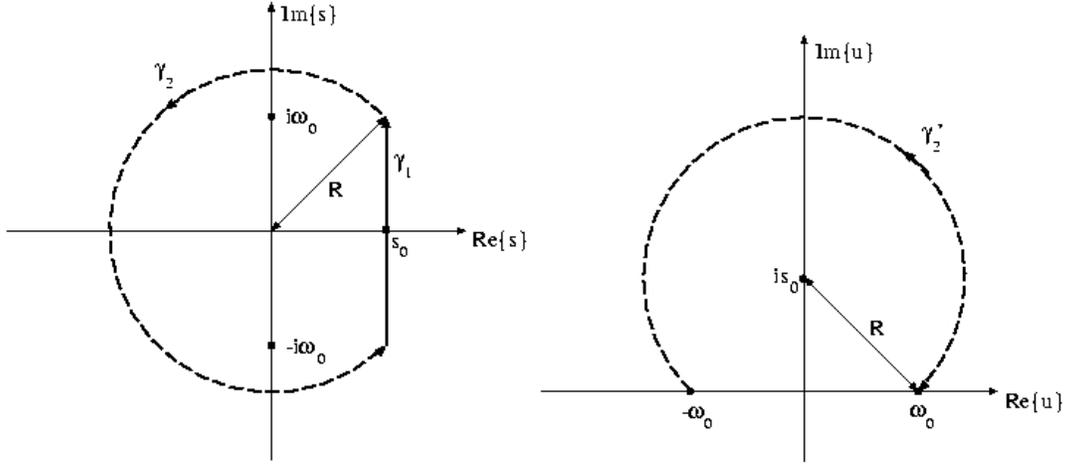


FIGURE 1. **A gauche** : Contour de Bromwich pour le calcul de la transformée de Laplace inverse. **A droite** : Le contour  $\gamma_2'$  défini par la transformation  $s \rightarrow u = -i(s - s_0)$ .

Afin d'obtenir une expression pour la transformée de Laplace inverse on part de l'éq. (265) et on considère la transformation de Fourier inverse de  $\tilde{g}(\omega; s_0)$ ,

$$g(t; s_0) \equiv f(t) \exp(-s_0 t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \hat{f}(s), \quad s = s_0 + i\omega.$$

Par conséquent

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(st) \hat{f}(s), \quad s = s_0 + i\omega.$$

Comme  $s_0 = \text{cste.}$ , on peut également écrire

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} ds \exp(st) \hat{f}(s), \quad ds = i d\omega. \quad (267)$$

Ceci est une intégrale de chemin le long du contour  $s(\omega) = s_0 + i\omega$ , où  $\omega$  est le paramètre du contour qui parcourt tout l'axe réel,  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ . Afin d'évaluer (267) on peut utiliser le théorème des résidus. On construit d'abord le contour fermé  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  montré en fig. 1 (Contour de Bromwich), et on introduit les intégrales

$$I_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} ds \hat{f}(s) \exp(st), \quad k = 1, 2.$$

Dans la limite  $\omega_0 \rightarrow \infty$ , ou bien  $R \rightarrow \infty$ ,  $\gamma_1$  devient le contour  $s(\omega)$  dans l'éq. (267). Afin de montrer que la contribution de  $\gamma_2$  au contour de Bromwich est

nulle dans la limite  $R \rightarrow \infty$ , on applique une transformation de variable dans l'intégrale  $I_2$ . On introduit la nouvelle variable

$$u = -i(s - s_0),$$

et  $I_2$  devient

$$I_2 := \frac{\exp(s_0 t)}{2\pi} \int_{\gamma_2} du \hat{f}(s_0 + iu) \exp(iut).$$

En décomposant  $u = u' + iu''$ , où  $u'$  et  $u''$  sont la partie réelle et imaginaire de  $u$ , respectivement, on obtient

$$I_2 := \frac{\exp(s_0 t)}{2\pi} \int_{\gamma_2} du \hat{f}(s_0 + iu) \exp(iu't) \exp(-u''t) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

car  $u'' > 0$  et  $u'' \rightarrow \infty$  si  $R \rightarrow \infty$ . Le facteur  $\exp(-u''t)$  décroît plus fortement que n'importe quelle puissance de  $R$  qui peut apparaître dans le reste de l'intégrand, en paramétrant  $\gamma_2$ . Par conséquent,

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} (I_1 + I_2).$$

En utilisant le théorème 4.4 on peut écrire

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C ds \hat{f}(s) \exp(st) = \sum_{\alpha} \text{Res} \left( \hat{f}(s) \exp(st), s_{\alpha} \right), \quad (268)$$

où  $C$  est n'importe quel contour fermé qui contient tous les pôles de  $\hat{f}(s)$ , comme le contour de Bomwich.

## 2. Exemples

Dans la suite on donnera quelques exemples pour l'application du théorème des résidus au calcul de la transformée de Laplace inverse.

**EXEMPLE 5.1 (Fonction de Heaviside).** On donne la fonction de Heaviside

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases} \quad (269)$$

La transformée de Laplace de  $\Theta(t)$  est

$$\hat{\Theta}(s) = \int_0^{\infty} dt \exp(-st) = \frac{1}{s}. \quad (270)$$

D'après l'éq. (268) on a

$$\Theta(t) = \text{Res} \left( \frac{\exp(st)}{s}, s = 0 \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \exp(st) = 1 \quad (t > 0) \quad \square$$

On rappelle que  $\Theta(t) \equiv 0$  si  $t < 0$ .

EXEMPLE 5.2 (**L'exponentielle**). On donne la fonction

$$f(t) = \Theta(t) \exp(at), \quad a \in \mathbb{C}. \quad (271)$$

La transformée de Laplace est

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty dt \exp(at) \exp(-st) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} > \Re\{a\}. \quad (272)$$

D'après l'éq. (268) on a

$$f(t) = \text{Res} \left( \frac{\exp(st)}{s-a}, s=a \right) = \lim_{s \rightarrow a} \exp(st) = \exp(at) \quad (t > 0) \quad \square$$

EXEMPLE 5.3 (**Fonctions trigonométriques**). On donne les fonctions

$$f_1(t) = \Theta(t) \cos \omega_0 t, \quad (273)$$

$$f_2(t) = \Theta(t) \sin \omega_0 t. \quad (274)$$

En utilisant l'exemple précédent on trouve que

$$\hat{f}_1(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-i\omega_0} + \frac{1}{s+i\omega_0} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad (275)$$

$$\hat{f}_2(s) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s-i\omega_0} - \frac{1}{s+i\omega_0} \right) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (276)$$

Les pôles de  $\hat{f}_1(s)$  et  $\hat{f}_2(s)$  sont  $s_{1,2} = \pm i\omega_0$ . Si  $\omega_0 > 0$ , on a la restriction  $\Re\{s\} > 0$  pour le contour de la transformation de Laplace inverse, et on trouve que

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sum_{\alpha} \text{Res} \left( \frac{s \exp(st)}{s^2 + \omega_0^2}, s = s_{\alpha} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow i\omega_0} \frac{s \exp(st)}{s + i\omega_0} + \lim_{s \rightarrow -i\omega_0} \frac{s \exp(st)}{s - i\omega_0} = \cos \omega_0 t \quad (t > 0) \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \sum_{\alpha} \text{Res} \left( \frac{\omega_0 \exp(st)}{s^2 + \omega_0^2}, s = s_{\alpha} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow i\omega_0} \frac{\omega_0 \exp(st)}{s + i\omega_0} + \lim_{s \rightarrow -i\omega_0} \frac{\omega_0 \exp(st)}{s - i\omega_0} = \sin \omega_0 t \quad (t > 0) \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPLE 5.4 (**Puissance  $t^n$** ). On donne la fonction

$$f_n(t) = \Theta(t) t^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (277)$$

Afin d'obtenir la transformée de Laplace on écrit ( $\Re\{s\} > 0$ )

$$\hat{f}_n(s) = \int_0^\infty dt t^n \exp(-st) = \underbrace{\left[ \frac{t^n \exp(-st)}{-s} \right]_0^\infty}_{=0} + \frac{n}{s} \int_0^\infty dt t^{n-1} \exp(-st).$$

On trouve donc la récursion

$$\hat{f}_n(s) = \frac{n}{s} \hat{f}_{n-1}(s)$$

dont l'application répétitive donne

$$\hat{f}_n(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Il suit la correspondance

$$t^n \longleftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (278)$$

On remarque que  $\hat{f}_n(s)$  a un pôle de multiplicité  $n + 1$  à  $s = 0$ . Il suit alors que

$$f_n(t) = \text{Res} \left( \frac{n! \exp(st)}{s^{n+1}}, s = 0 \right) = \frac{1}{n!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n}{ds^n} \{n! \exp(st)\} = t^n \quad (t > 0) \quad \square$$

### 3. Quelques règles de calcul pour la transformée de Laplace

**3.1. Linéarité.** Comme la transformation de Laplace est une transformation d'intégrale et donc une opération linéaire, il suit que

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \longleftrightarrow \alpha \hat{f}(s) + \beta \hat{g}(s) \quad (279)$$

pour n'importe quels coefficients  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

**3.2. Décalage en  $t$ .** On donne une fonction  $f(t) = \Theta(t)f(t)$  dont la transformée de Laplace  $\hat{f}(s)$  existe, tel que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint ds \hat{f}(s) \exp(st).$$

Pour  $a > 0$  on obtient pour la transformée de Laplace de  $f(t - a)$  (décalage vers la droite)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t - a), t, s\} &= \int_0^\infty dt \exp(-st) f(t - a) \\ &\stackrel{\tau=t-a}{=} \int_{-a}^\infty d\tau \exp(-s[\tau + a]) f(\tau) \\ &= \exp(-sa) \int_0^\infty dt \exp(-s\tau) f(\tau), \end{aligned}$$

car  $f(\tau) \equiv 0$  si  $\tau < 0$ . On trouve donc la correspondance

$$f(t - a) \longleftrightarrow \hat{f}(s) \exp(-sa). \quad (280)$$

Si  $f(t)$  est décalée vers la gauche, la transformée de Laplace a une forme moins simple. On écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t+a), t, s\} &= \int_0^\infty dt \exp(-st) f(t-a) \\ &\stackrel{\tau=t+a}{=} \int_a^\infty d\tau \exp(-s[\tau+a]) f(\tau) \\ &= \exp(sa) \left\{ \int_0^\infty d\tau \exp(-s\tau) f(\tau) - \int_0^a d\tau \exp(-s\tau) f(\tau) \right\}. \end{aligned}$$

Ici on trouve la correspondance

$$f(t+a) \longleftrightarrow \exp(sa) \left\{ \hat{f}(s) - \int_0^a d\tau \exp(-s\tau) f(\tau) \right\}. \quad (281)$$

**3.3. Similarité.** On donne une fonction  $f(t) = \Theta(t)f(t)$  dont la transformée de Laplace  $\hat{f}(s)$  existe, tel que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint ds \hat{f}(s) \exp(st).$$

Il suit que ( $\gamma > 0$ )

$$f(\gamma t) = \frac{1}{2\pi i} \oint ds \hat{f}(s) \exp(s\gamma t) \stackrel{u=\gamma s}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{du}{\gamma} \hat{f}\left(\frac{u}{\gamma}\right) \exp(ut).$$

On obtient alors la correspondance ( $u \rightarrow s$ )

$$f(\gamma t) \longleftrightarrow \frac{1}{\gamma} \hat{f}\left(\frac{s}{\gamma}\right). \quad (282)$$

Une relation similaire existe pour la transformée de Fourier (voir eq. (156)). On remarque que la relation (282) donne également une relation de similarité dans le sens inverse. En posant  $\mu = 1/\gamma$  on obtient

$$\frac{1}{\mu} f\left(\frac{s}{\mu}\right) \longleftrightarrow \hat{f}(\mu s). \quad (283)$$

**3.4. Convolution.** On donne deux fonctions,  $f(t) = \Theta(t)f(t)$  et  $g(t) = \Theta(t)g(t)$ , et leurs transformées de Laplace respectives,  $\hat{f}(s)$  et  $\hat{g}(s)$ . En utilisant la définition de la convolution non-périodique de  $f(t)$  et  $g(t)$ ,

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(t-\tau)g(\tau) = \int_0^t d\tau f(t-\tau)g(\tau), \quad (284)$$

le théorème de convolution pour les transformées de Laplace s'écrit

$$(f * g)(t) \longleftrightarrow \hat{f}(s)\hat{g}(s). \quad (285)$$

PREUVE :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \exp(-st) \int_0^t d\tau f(t-\tau)g(\tau) &= \int_0^\infty d\tau g(\tau) \underbrace{\int_0^\infty dt \exp(-st)f(t-\tau)}_{\exp(-s\tau)\hat{f}(s)} \\ &= \hat{f}(s) \int_0^\infty d\tau g(\tau) \exp(-s\tau) = \hat{f}(s)\hat{g}(s) \quad \square \end{aligned}$$

Ici on a utilisé que

- la limite supérieure de l'intégrale de convolution peut être étendue de  $t$  à  $+\infty$ , car  $f(t-\tau) \equiv 0$  si  $\tau > t$  (voir éq. (284)),
- la relation (280) peut être utilisée ( $a \equiv \tau$ ) pour obtenir la transformée de Laplace de  $f(t-\tau)$  par rapport à  $t$ .

**3.5. Distribution de Dirac.** On définit d'abord la fonction auxiliaire

$$h_\tau(t) := \frac{1}{\tau} \{\Theta(t) - \Theta(t-\tau)\}. \quad (286)$$

Comme la fonction  $h_\alpha(t)$  définie en éq. (135),  $h_\tau(t)$  est une pulsation de durée limitée dont l'intégrale est normée à 1, tel que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} h_\tau(t) = \delta(t). \quad (287)$$

Afin de pouvoir calculer la transformée de Laplace,  $h_\tau(t)$  remplit la condition  $h_\tau(t) = \Theta(t)h_\tau(t)$ . Il suit que

$$\hat{h}_\tau(s) = \frac{1 - \exp(-s\tau)}{s\tau} \stackrel{\tau \rightarrow 0}{\equiv} 1. \quad (288)$$

On a alors la correspondance

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \equiv \hat{\delta}(s). \quad (289)$$

**3.6. Différentiation.** Soit  $f(t)$  une fonction dont la transformée de Laplace,  $\hat{f}(s)$ , existe. La transformée de Laplace de la dérivée  $\dot{f}(t)$  est donnée par

$$\dot{f}(t) \longleftrightarrow s\hat{f}(s) - f(0). \quad (290)$$

PREUVE :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \exp(-st) \frac{df(t)}{dt} &= [\exp(-st)f(t)]_0^\infty + \int_0^\infty dt s \exp(-st) f(t) \\ &= s\hat{f}(s) - f(0) \quad \square \end{aligned}$$

Pour la  $n$ -ième dérivée on trouve la correspondance

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^n \hat{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad (291)$$

où  $f^{(n)}(t) \equiv d^n f / dt^n$ .

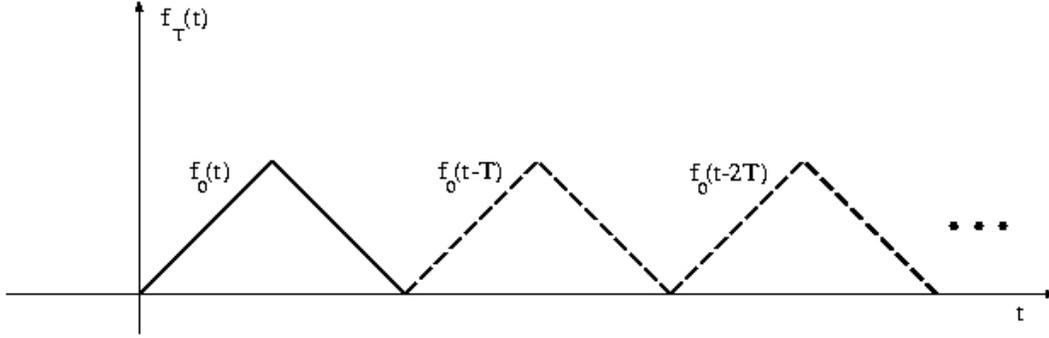


FIGURE 2. Construction d'une fonction semi-périodique  $f_T(t)$  par répétition d'un motif  $f_0(t)$ .

PREUVE : On écrit d'abord

$$\int_0^{\infty} dt \exp(-st) f^{(n)}(t) = [\exp(-st) f^{(n-1)}(t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} dt s \exp(-st) f^{(n-1)}(t)$$

Avec la définition  $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t), t, s\} := \hat{f}^{(n)}(s)$  on trouve alors la récursion

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t), t, s\} = s \mathcal{L}\{f^{(n-1)}(t), t, s\} - f^{(n-1)}(0).$$

Application consécutive à toutes transformées de Laplace des dérivées de  $f(t)$  donne (291)  $\square$

**3.7. Fonctions périodiques.** On considère une fonction semi-périodique  $f_T(t)$  de période  $T > 0$ , qui est définie pour  $t > 0$ ,  $f_T(t) = \Theta(t) f_T(t)$ . La fonction  $f_T(t)$  peut être construite par répétition d'un motif  $f_0(t)$  (voir fig. 2),

$$f_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(t - nT). \quad (292)$$

Formellement, la construction de  $f_T(t)$  peut être écrite sous forme d'une convolution,

$$f_T(t) = (\delta_T * f_0)(t), \quad (293)$$

où  $\delta_T(t)$  est un "demi-peigne" de Dirac,

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (294)$$

Afin d'obtenir la transformée de Laplace de  $f_T(t)$ , on peut utiliser le théorème de convolution. L'utilisation des correspondances (289) et (280) donne

$$\delta(t - nT) \longleftrightarrow \exp(-snT),$$

et on obtient

$$\delta_T(t) \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-snT) = \frac{1}{1 - \exp(-sT)}. \quad (295)$$

Ici on utilise que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-snT) = \sum_{n=0}^{\infty} (\exp(-sT))^n = \frac{1}{1 - \exp(-sT)},$$

car  $|\exp(-sT)| < 1$  avec  $\Re\{s\} > 0$ . Comme  $\hat{f}_T(s) = \delta_T(t) \hat{f}_0(s)$ , où  $\hat{f}_0(s)$  est la transformée de Laplace de  $f_0(t)$ , on obtient

$$\hat{f}_T(s) = \frac{\hat{f}_0(s)}{1 - \exp(-sT)}. \quad (296)$$

#### 4. Solution des équations différentielles

**4.1. Concept, fonction de transfert, stabilité.** La transformation de Laplace est un outil très performant pour la solution des équations différentielles du type

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = f(t), \quad (297)$$

où  $a_k$  sont des constantes et  $y^{(k)}(t)$  est la  $k$ -ième dérivée de  $y(t)$  par rapport à  $t$ . L'inhomogénéité doit vérifier  $f(t) = \Theta(t)f(t)$ , et on cherche la solution  $y(t)$  pour  $t > 0$ . En utilisant l'identité (291) on trouve facilement la solution de (297), tenant automatiquement compte des conditions initiales. Ceci est un avantage par rapport à l'utilisation de la transformée de Fourier. La transformée de Laplace de la solution (complète)  $y(t)$  prend la forme,

$$\hat{y}(s) = \frac{Q(s; \{y^{(k)}(0)\})}{P(s)} + \underbrace{\frac{\hat{f}(s)}{P(s)}}_{y_p(t)}, \quad (298)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes de degré  $n$  et  $m < n$ , respectivement, et  $Q$  dépend des conditions initiales  $\{y^{(k)}(0)\}$ . Si l'on introduit la fonction de transfert,  $h(t)$ , et sa transformée de Laplace,

$$\hat{h}(s) = \frac{1}{P(s)}, \quad (299)$$

on peut écrire

$$\hat{y}_P(s) = \hat{h}(s) \hat{f}(s), \quad (300)$$

et la solution particulière  $y_p(t)$  de (297) prend la forme d'une convolution (comparer eq. (186))

$$\hat{y}_P(t) = (h * f)(t) \equiv \int_0^t d\tau h(t - \tau) f(\tau). \quad (301)$$

Si les pôles  $s_k$  de  $\hat{h}(s)$  (ou bien les zéros de  $P(s)$ ) ont tous la propriété

$$\Re\{s_k\} \leq 0, \quad (302)$$

la solution  $y(t)$  est *stable*. Sinon elle a une croissance exponentielle pour  $t \rightarrow \infty$ . En revanche, les pôles  $\omega_k$  de la transformée de Fourier  $\tilde{h}(\omega)$  (si elle existe!) doivent vérifier

$$\Im\{\omega_k\} \geq 0. \quad (303)$$

Un exemple a été donné en section 7.2. La condition (303) garantit également que  $h(t)$  est *causale*, la raison étant que le contour pour le calcul de  $h(t)$  ne contient pas de singularités de  $\tilde{h}(\omega)$  si  $t < 0$ . La fonction de transfert déterminée par transformation de Laplace est *causale par définition*.

L'examen des pôles de  $\hat{h}(s)$  (et de  $\tilde{h}(\omega)$ ) est important pour comprendre les propriétés essentielles de la solution d'une équation différentielle linéaire, mais  $h(t)$  ne doit pas être explicitement construite afin d'obtenir cette solution.

**4.2. Exemples.** Pour illustrer l'utilité de la transformée de Laplace pour la solution des équations différentielles, deux exemples seront présentés dans la suite.

EXEMPLE 5.5. On regarde l'équation différentielle

$$\dot{v}(t) + \gamma v(t) = \cos \omega_0 t,$$

où  $\gamma > 0$  et  $\omega_0 > 0$ . La solution de cette équation différentielle a été discutée en section 8.4. Ici on présentera la solution par transformation de Laplace. Ceci donne d'abord l'équation algébrique

$$s\hat{v}(s) - v(0) + \gamma\hat{v}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}.$$

La solution par rapport à  $\hat{v}(s)$  donne

$$\begin{aligned} \hat{v}(s) &= \frac{s}{(s + \gamma)(s^2 + \omega_0^2)} + \frac{v(0)}{s + \gamma} \\ &= \frac{s}{(s - s_0)(s - s_1)(s - s_2)} + \frac{v(0)}{s - s_0}, \end{aligned}$$

où les pôles  $s_\alpha$  sont

$$s_0 = -\gamma, \quad s_{1,2} = \pm i\omega_0.$$

D'après l'identité (268) on obtient la *solution complète*

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{s \exp(st)}{(s - s_1)(s - s_2)} + \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{s \exp(st)}{(s - s_0)(s - s_2)} \\ &\quad + \lim_{s \rightarrow s_2} \frac{s \exp(st)}{(s - s_0)(s - s_1)} + \lim_{s \rightarrow s_0} v(0) \exp(st) \\ &= v(0) \exp(-\gamma t) + \frac{\gamma \cos \omega_0 t + \omega_0 \sin \omega_0 t - \gamma \exp(-\gamma t)}{\gamma^2 + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

La solution stationnaire,  $y_\infty(t)$ , est obtenu en négligeant tous les termes  $\propto \exp(-\gamma t)$ . Ceci donne

$$y_\infty(t) = \frac{\gamma \cos \omega_0 t + \omega_0 \sin \omega_0 t}{\gamma^2 + \omega_0^2},$$

en accord avec eq. (127) (voir aussi fig. 9). Avec la méthode de transformation de Laplace on obtient directement la solution complète d'une équation différentielle, et on peut séparer la partie stationnaire de la partie transitoire de la solution. On n'a pas besoin de construire d'abord une solution particulière, d'ajouter la forme générale de la solution de l'équation homogène, et de fixer les constantes libres par les conditions initiales.

EXEMPLE 5.6. On reprend l'exemple traité en section 7.3, i.e. l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) + \gamma \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \Theta(t). \quad (304)$$

Transformation de Laplace de l'équation différentielle donne

$$s^2 \hat{y}(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + \gamma (s\hat{y}(s) - y(0)) + \omega_0^2 \hat{y}(s) = \frac{1}{s}.$$

La transformée de Laplace de la solution  $y(t)$  s'écrit alors

$$\hat{y}(s) = \frac{(s^2 + \gamma s)y(0) + s\dot{y}(0) + 1}{s(s^2 + \gamma s + \omega_0^2)}.$$

Avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} y(0+) &\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} y(\epsilon) = 0, \\ \dot{y}(0+) &\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{y(\epsilon) - y(0)}{\epsilon} = 0, \end{aligned}$$

$\hat{y}(s)$  prend la forme

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s(s^2 + \gamma s + \omega_0^2)} = \frac{1}{(s - s_0)(s - s_1)(s - s_2)}.$$

Les pôles de  $\hat{y}(s)$  sont  $s_0 = 0$  et

$$s_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\Omega,$$

où l'on a défini

$$\Omega := \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \begin{cases} = |\Omega| & \text{if } \omega_0^2 \geq \frac{\gamma^2}{4} \\ = i|\Omega| & \text{if } \omega_0^2 < \frac{\gamma^2}{4} \end{cases}.$$

On remarque que

$$\Re\{s_k\} \leq 0,$$

ce qui montre que la solution  $y(t)$  est stable. On rappelle que la solution de l'équation (304) par transformation de Fourier présentée en section 7.3 menait aux pôles  $\omega_{1,2} = \frac{i\gamma}{2} \pm \Omega$  du polynôme caractéristique  $P(z)$ . Ceci montre également que la solution est stable (et que la fonction de transfert est causale, une propriété qui est implicite si l'on travaille avec la transformation de Laplace).

D'après l'identité (268) on obtient la *solution complète*  $y(t)$  par

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\exp(st)}{(s - s_1)(s - s_2)} + \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\exp(st)}{s(s - s_2)} + \lim_{s \rightarrow s_2} \frac{\exp(st)}{s(s - s_1)} \\ &= \frac{1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \left[\cos \Omega t + \frac{\gamma}{2\Omega} \sin \Omega t\right]}{\omega_0^2}. \end{aligned}$$

La solution pour le cas limite apériodique ( $\Omega \rightarrow 0$ ) s'écrit

$$y(t) = \frac{1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \left[1 + \frac{\gamma t}{2}\right]}{\omega_0^2}.$$

Si  $\Omega$  devient complexe,  $\Omega = i|\Omega|$ , les fonctions  $\cos \Omega t$  et  $\sin \Omega t$  sont à remplacer par  $\cosh |\Omega|t$  et  $i \sinh |\Omega|t$ , respectivement. On obtient

$$y(t) = \frac{1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \left[\cosh |\Omega|t + \frac{\gamma}{2|\Omega|} \sinh |\Omega|t\right]}{\omega_0^2}.$$

On retrouve les solutions de l'exemple 7.3 (voir fig. 7).