Licence de Physique, Université d'Orléans
Corrigé examen *Mathématiques pour Sciences Physique*s – parcours Physique et Applications, 24/6/2011

1 Séries de Fourier (6/20)

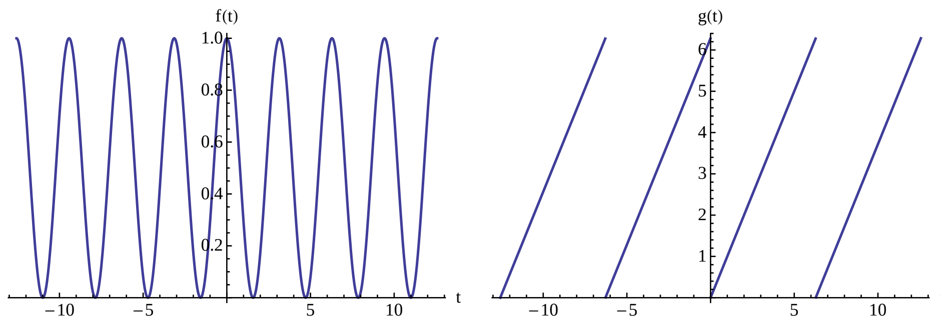

FIGURE 1 – Les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ de l'exercice 1

Les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont montrées dans la figure 1. En utilisant la formule de Moivre, $f(t)$ peut être développé en

$$f(t) = \frac{1}{4}e^{-2it} + \frac{1}{4}e^{2it} + \frac{1}{2}$$

d'où on trouve pour les coefficients de Fourier

$$f_n = \begin{cases} 1/4 & \text{si } n = -2, \\ 1/2 & \text{si } n = 0, \\ 1/4 & \text{si } n = 2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Les coefficients de Fourier de g_n sont donnés par

$$g_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dt\, t e^{-int} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \frac{i(-1)^n}{n} & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Avec ces résultats et le théorème de convolution pour les séries de Fourier on obtient

$$\begin{aligned}(f * g)_{2\pi}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n g_n e^{int} \\ &= f(-2)g(-2)e^{-2it} + f(0)\underbrace{g(0)}_{=0} + f(2)g(2)e^{2it} = -\frac{1}{4}\sin(2t).\end{aligned}$$

2 Transformation de Fourier et de Laplace (8/20)

a) Pour une fonction réelle et paire $h(t)$ on a

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-i\omega t} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \{\cos\omega t - i \sin\omega t\} f(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \cos\omega t f(t) = 2\int_{0}^{\infty} dt\, \cos\omega t f(t) \\ &= 2\Re\left\{\int_{0}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} f(t)\right\} = 2\Re\left\{\hat{f}(i\omega)\right\}.\end{aligned}$$

Pour une fonction réelle et impaire $g(t)$ on a

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-i\omega t} g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \{\cos\omega t - i \sin\omega t\} g(t) \\ &= -i\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \sin\omega t g(t) = -2i\int_{0}^{\infty} dt\, \sin\omega t g(t) \\ &= 2i\Im\left\{\int_{0}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} g(t)\right\} = 2i\Im\left\{\hat{g}(i\omega)\right\}.\end{aligned}$$

b) Pour les fonctions $f(t) = e^{-\gamma|t|}$ et $g(t) = te^{-\gamma|t|}$ ont calcule les transformées de Laplace (on n'utilise que les parties pour $t \geq 0$)

$$\hat{f}(s) = \int_{0}^{\infty} dt\, e^{-st} f(t) = \frac{1}{s+\gamma},$$
$$\hat{g}(s) = \int_{0}^{\infty} dt\, e^{-st} g(t) = \frac{1}{(s+\gamma)^2}.$$

Avec ceci

$$\tilde{f}(\omega) = 2\Re\left\{\hat{f}(i\omega)\right\} = \frac{2\gamma}{\gamma^2+\omega^2},$$
$$\tilde{g}(\omega) = 2i\Im\left\{\hat{g}(i\omega)\right\} = -\frac{4i\gamma\omega}{(\gamma^2+\omega^2)^2}.$$

3 Analyse complexe (6/20)

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, la fonction

$$F(s) = \frac{1}{s(1+s^{-\alpha})}$$

est une fonction rationnelle en s et on peut écrire

$$f_\alpha(t) = \sum_k \mathrm{Res}(F(s), s = s_k),$$

où s_k sont les pôles de $F(s)$. Avec ceci on trouve

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pour } n = 0, \\ \exp(-t) & \text{pour } n = 1, \\ \cos(t) & \text{pour } n = 2. \end{cases}$$