Université d'Orléans, Licence de Physique (parcours PA)
TDs Mathématiques pour sciences physiques
Année 2012/2013

1 Nombres complexes

Exercice 1 : *Equations quadratiques*

On donne les equations

$$z^2 - 2z + 2 = 0, \quad (1)$$
$$z^2 - 2iz + 2 = 0. \quad (2)$$

a) Calculez les solutions de l'éq. (1) et vérifiez par insertion que les solutions sont correctes. Localisez les solutions dans le plan complexe.
b) Idem pour l'éq. (2).

Exercice 2 : *Forme polaire*

Transformez en forme polaire (a) $z = 1 + i$, (b) $z = 1 - i$, (c) $z = (1 + i)^2$, d) $z = (1 - i)^2$, (e) $z = i(1 - i)^2$.

Exercice 3 : *Formule d'Euler et Moivre*

Montrez par récurrence

$$\{\cos(\phi) + i\sin(\phi)\}^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 4 : *Règles de calcul*

Soient $z, z_, z_2$ deux nombres complexes quelconques. Montrer que
- $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$,
- $(1/z)^* = 1/z^*$,
- $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$,
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Exercice 5 : *Racines complexes*

Trouvez toutes les solutions de (a) $z^4 = 16$, (b) $z^4 = -16$, (c) $z^3 = i$ et localisez ces solutions dans le plan complexe.

Exercice 6 : *Domaines en $\mathbb{C}$*

Faites un dessin des domaines dans le plan complexe qui sont définis par
(a) $|z - 3| \leq 2$, (b) $|z + 4| > 4$, (c) $\frac{|z-1|}{|z+2|} \geq 2$, (d) $|z - 1| \leq \mathrm{Re}(z)$.

Université d'Orléans, Licence de Physique (parcours PA)
TD Mathématiques pour sciences physiques
Année 2010/2011

2 Séries de Fourier

Exercice 1 : On donne $f(t)$ par

$$f(t) := \left\{ \begin{array}{ll} 0, & -5 < t < 0 \\ 3, & 0 < t < 5 \end{array} \right\} \quad \text{période} = 10.$$

– Faites un dessin de la fonction $f(t)$.
– Developpez $f(t)$ en une série de Fourier.
– Comment faut-il définir $f(t)$ à $t = 5n$ ($n \in \mathbb{Z}$) pour que la série de Fourier converge partout vers $f(t)$?

Exercice 2 : On donne

$$f(t) = t^2, \quad 0 < t < 2\pi, \qquad \text{période} = 2\pi.$$

– Faites un dessin de la fonction $f(t)$.
– Developpez $f(t)$ en une série de Fourier.

Exercice 3 : On donne

$$\left. \begin{array}{lll} f(t) & = t, & -2 < t < 2 \\ g(t) & = |t|, & -2 < t < 2 \end{array} \right\} \qquad \text{période} = 4.$$

– Faites un dessin des fonctions $f(t)$ et $g(t)$.
– Developpez $f(t)$ et $g(t)$ en une série de Fourier.

Exercice 4 : Développez $f(t)$ de l'exercice no. 1 en une série de Fourier complexe et montrez l'équivalence avec la série réelle.

Exercice 5 : On donne la fonction $g(t)$ de l'exercice no. 3. Utilisant le théorème de Parseval, montrez que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Université d'Orléans, Licence de Physique (parcours PA)
TD Mathématiques pour sciences physiques
Année 2010/2011

3 Signaux périodiques : applications, compléments

Exercice 1 :
- Partant de la relation $\frac{d}{dt}e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, montrez que cette relation reste valable si $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, où $\alpha', \alpha'' \in \mathbb{R}$. Utilisez la formule d'Euler pour la démonstration.
- Montrez que $\int dt\, e^{\alpha t} = \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha t}$ + cste ($\alpha = \alpha' + i\alpha''$, $\alpha', \alpha'' \in \mathbb{R}$). Conseil : Montrez d'abord que $\int dt\, e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega}\, e^{i\omega t}$ + cste ($\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$).

Exercice 2 : Dans un circuit LRC (voir figure) on a

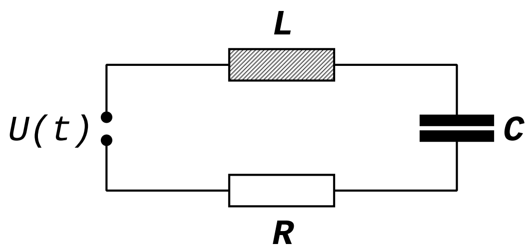

FIGURE 1 – Circuit LRC

$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = U(t)$ dans l'approximation quasi-stationnaire. On sait que $U_R = RI$, $U_C = Q/C$ et $U_L = L\dot{I}$. Ici $I = \dot{Q}$ est le courant et Q est la charge sur le capaciteur. On donne $U(t) \doteq U_0 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$.
- Trouvez d'abord l'équation différentielle pour le courant $I(t)$. Comparez avec l'équation de mouvement d'un oscillateur harmonique unidmensionnel sous l'influence d'une force de friction $f_\gamma = -\gamma\dot{x}$, $\gamma > 0$
- Trouvez la solution stationnaire pour $I(t)$.
- Donnez l'amplitude et la phase de $I(t)$.
- Trouvez les fréquences de résonance pour les tensions U_R, U_L et U_C.

Exercice 3 : Trouvez la solution stationnaire de l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = |\sin(\omega_0 t)|, \qquad \omega_0 > 0, \gamma > 0,$$

sous forme de série de Fourier. Quelle est la fonction de transfert périodique ?

Université d'Orléans, Licence de Physique (parcours PA)
TD Mathématiques pour sciences physiques
Année 2010/2011

4 Convolution périodique, peigne de Dirac

Exercice 1 :

Soit $\Delta_\epsilon(t)$ une fonction périodique avec la période T qui est définie par

$$\Delta_\epsilon(t) := \begin{cases} \frac{T}{\epsilon}\left(1 - \frac{|t|}{\epsilon}\right), & |t| < \epsilon, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici ϵ est un paramètre réel avec $0 < \epsilon < T/2$.

- Faites un dessin de $\Delta_\epsilon(t)$ pour différentes valeurs de ϵ.
- Calculez les coefficients de Fourier Δ_n de $\Delta_\epsilon(t)$.
- Montrez que
$$\lim_{\epsilon \to 0} \Delta_n = 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
Quel est le résultat de la convolution périodique $(\Delta_\epsilon \star f)(t)$ pour $\epsilon \to 0$, où $f(t)$ est une fonction périodique ayant la même période que $\Delta_\epsilon(t)$? (On suppose que $(\Delta_\epsilon \star f)(t)$ existe).

Exercice 2 :

On donne
$$\Delta_\epsilon(t) := \begin{cases} \frac{T}{2\epsilon}, & |t| < \epsilon, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$
avec $T := 2\pi$, et la fonction périodique (voir cours)

$$f(t) := \frac{t}{2\pi}, \quad 0 < t < 2\pi; \quad \text{période} = 2\pi.$$

- Calculez $(\Delta_\epsilon \star f)(t)$ par intégration directe.
- Faites un dessin de $(\Delta_\epsilon \star f)(t)$ et vérifiez que cette fonction est continue.
- Montrez que $(\Delta_\epsilon \star f)(t)$ tend vers $f(t)$ si on prend la limite $\epsilon \to 0$, et si l'on definit
$$f(2k\pi) = \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
- Vérifiez que les coefficients de Fourier C_n de $(\Delta_\epsilon \star f)(t)$ sont donnés par les produits des coefficients respectifs de $f(t)$ et $\Delta_\epsilon(t)$.
- Montrez que
$$\lim_{\epsilon \to 0} C_n = f_n,$$
où f_n sont les coefficients de Fourier de $f(t)$.

Université d'Orléans, Licence de Physique (parcours PA)
TD Mathématiques pour sciences physiques
Année 2010/2011

5 Transformées de Fourier

Exercice 1 :

En utilisant la formule d'Euler, montrez que

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\alpha(t-it_0)^2}, \quad \alpha > 0, t_0 \in \mathbb{R},$$

ne dépend pas de t_0, ce qui est équivalent à dire que $dI/dt_0 = 0$. (Dans le cours on a utilisé ce résultat pour trouver la transformée de Fourier d'une gaussienne.)

Exercice 2 :

Trouvez la transformée de Fourier pour les fonctions suivantes :

1. avec $a > 0$
$$f(t) := \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$
2. $f(t) := e^{-a|t|} \sin \omega_0 t$, avec $a > 0, \omega_0 > 0$. Discutez la limite $a \to 0$.
3. avec $\epsilon > 0$
$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}, & |t| \leq \epsilon, \\ 0, & |t| > \epsilon. \end{cases}$$
Discutez la limite $\epsilon \to 0$.

Exercice 3 :

On donne la fonction
$$f(t) := \begin{cases} 1, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$
Calculez l'auto-convolution $(f \star f)(t)$ par calcul direct et verifiez que sa transformée de Fourier est donnée par $F(\omega)^2$.

Exercice 4 :

On donne la fonction $f(t)$ de l'exercice 3 et $g(t) := \cos \omega_0 t$ ($\omega_0 > 0$). Calculez la convolution $(f \star g)(t)$ par calcul direct. Verifiez que $\lim_{\epsilon \to 0}(f \star g)(t) = g(t)$ et que la transformée de Fourier de $(f \star g)(t)$ est donnée par $F(\omega)G(\omega)$.

Université d'Orléans, Licence de Physique (parcours PA)
TD Mathématiques pour sciences physiques
Année 2010/2011

6 Fonctions d'une variable complexe

Exercice 1 :

Calculez $\mathrm{Ln}(z)$, la valeur de la branche principale du logarithme de z, pour (a) $z = 7/2$, (b) $z = -7/2$, (c) $z = i$, (d) $z = -2 - 2i$.

Exercice 2 :

Montrez que $\mathrm{Ln}(\exp(z)) = z$.

Exercice 3 :

Vérifiez si les fonctions suivantes sont analytiques/holomorphes :
- $f(z) = z, \quad z \in \mathbb{C}$.
- $f(z) = z^*, \quad z \in \mathbb{C}$.
- $f(z) = e^z, \quad z \in \mathbb{C}$.
- $f(z) = \cos z, \quad z \in \mathbb{C}$.
- $1/z^2, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq 0$.

Exercice 4 :

Calculez l'integrale

$$\int_{1+i}^{2+4i} dz\, z^2$$

pour les contours suivants :
- $z(\lambda) = \lambda + i\lambda^2, \quad \lambda \in [1, 2]$,
- la droite qui passe par $z_a = 1 + i$ et $z_b = 2 + 4i$.

Exercice 5 :

Calculez les integrales
- $\oint_C dz\, \frac{\cos z}{z-\pi}$, où C est le contour $|z - 1| = 3$.
- $\oint_C dz\, \frac{e^z}{z(z+1)}$, où C est le contour $|z - 1| = 3$.

Université d'Orléans, Licence de Physique (parcours PA)
TD Mathématiques pour sciences physiques
Année 2010/2011

7 Transformée de Laplace

Exercice 1 :

Trouvez la transformée de Laplace de

- $f(t) = t^4 - 3t^2 + 5$,
- $f(t) = 3e^{-2t} + 5e^{-3t}$,
- $f(t) = \cosh(t)$,
- $f(t) = \sinh(t)$.

Exercice 2 :

Utilisez le théorème de résidues pour trouver la fonction $f(t)$, où

- $\hat{f}(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$,
- $\hat{f}(s) = \frac{2s+3}{(s+1)^2}$,
- $\hat{f}(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s^2+1)}$,
- $\hat{f}(s) = \frac{1}{s^n}, \qquad n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :

Trouvez la transformée de Laplace de la fonction *périodique* pour $t \geq 0$,

$$f(t) = (\Theta(t) - \Theta(t - T/2)) , \qquad 0 \leq t < T, \qquad \text{période} = T.$$

$f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Exercice 4 :

Montrez que

- $\lim_{h \to 0+} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \leftrightarrow s\hat{f}(s) - f(0)$,
- $\lim_{h \to 0+} \frac{f(t)-f(t-h)}{h} \leftrightarrow s\hat{f}(s)$.

Exercice 5 :

On donne l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x(t) = \theta(t),$$

Trouvez la fonction de transfert $h(t)$ et la solution $x(t)$. avec
$x(0) = 2, dx/dt(0) = 0$.