Corrigé exercices *Systèmes Dynamiques*
Master (M1) de Physique
Feuille 1

1. (a) Equation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial x} = -V_0 k \sin[kx] \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + V_0 k \sin[kx] = 0}$$

(b) La quantité de mouvement associée à x est $p = \partial L/\partial \dot{x} = M\dot{x}$, et l'hamiltonien est par définition

$$H(p,x) = p\dot{x} - L(x,\dot{x}), \quad \text{où} \quad \dot{x} = p/M.$$

On trouve que

$$\boxed{H(p,x) = \frac{p^2}{2M} + V_0(1 - \cos[kx])}$$

Les équations de mouvement associées sont

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{M},$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -V_0 k \sin(kx).$$

(c) On cherche les points (x,p) pour lesquels $\dot{x} = \dot{p} = 0$. Ceci donne les conditions $p = 0$ et $\sin[kx] = 0$, ou bien

$$p = 0 \quad \text{et} \quad x = n\frac{\pi}{k}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Avec la définition de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} \\ -V_0 k^2 \cos[kx] & 0 \end{pmatrix}$$

on trouve avec (1)

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} \\ V_0 k^2 (-1)^{n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche les racines du polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}_0$,

$$p(\lambda) = |\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{1}| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{M} \\ V_0 k^2 (-1)^{n+1} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{V_0 k^2}{M}(-1)^n = 0.$$

Ceci donne

$$\lambda = \begin{cases} \pm i\sqrt{\frac{V_0 k^2}{M}} & \text{si } n \text{ paire,} \\ \pm\sqrt{\frac{V_0 k^2}{M}} & \text{si } n \text{ impaire.} \end{cases}$$

Les points (1) sont donc stables (foyers) si n est paire et instables si n est impaire, car une valeur propre est positive dans le dernier cas.

2. (a) Les équations du mouvement ont la forme générale

$$\dot{x}_k = x_k \phi_k(x_1, \ldots, x_n), \quad (k = 1, 2)$$

tel que la solution formelle s'écrit (voir cours)

$$x_k(t) = x_k(0) \exp\left(\int_0^t d\tau \phi_k(x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau))\right) \geq 0 \quad \text{si } x_k(0) \geq 0.$$

(b) Ici la matrice $\mathbf{A}$ a la forme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_2 & \alpha x_1 \\ 0 & -2\beta x_2 \end{pmatrix},$$

où $x_{1,2}$ sont des points quelconques. Les racines du polynôme caractéristique sont alors obtenues par la condition

$$p(\lambda) = \|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}\| = \begin{vmatrix} \alpha x_2 - \lambda & \alpha x_1 \\ 0 & -2\beta x_2 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(\alpha x_2 - \lambda)(2\beta x_2 + \lambda) = 0.$$

On trouve alors

$$\lambda_1 = \alpha x_2 \geq 0$$
$$\lambda_2 = -2\beta x_2 \leq 0.$$

En général, on n'a pas une solution stable, sauf si $x_2 \equiv 0$.

(c) Non, la stabilité ($\lambda_{1,2} < 0$) est une condition pour un point fixe qui doit être "attirant".

(d) Avec

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

on calcule

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = \text{tr}\{\mathbf{A}\} = (\alpha - 2\beta) x_2.$$

Dans le cours il a été démontré que $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V}$ est une condition nécessaire et suffisante pour la conservation du volume de l'espace de phases. Par conséquent

$$\boxed{\beta = \alpha/2}$$

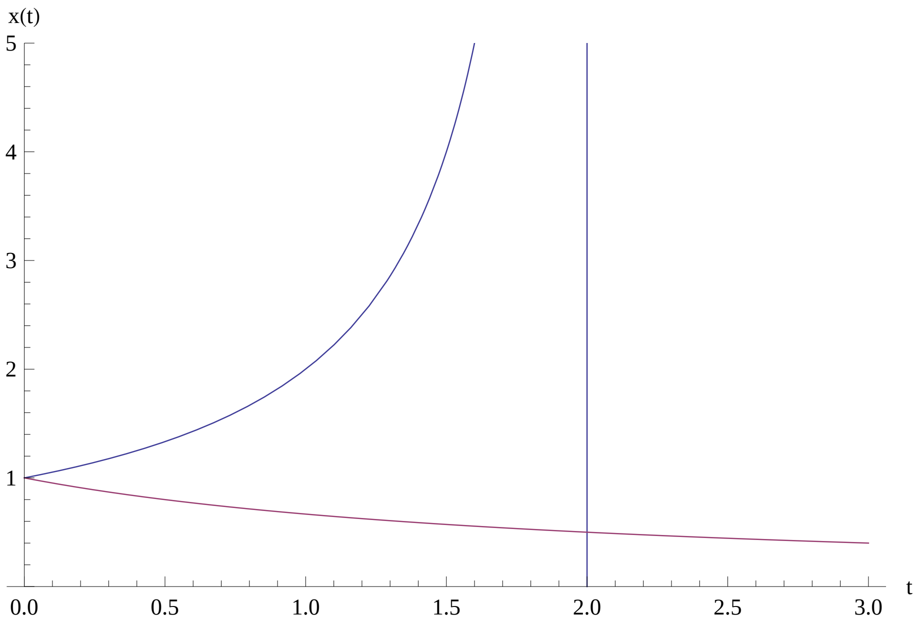

FIGURE 1 – Solution $x(t)$ de l''exercice 2 pour $x(0) = 1$, $\beta = 1/2$ (courbe bleue) et pour $x(0) = 1$, $\beta = -1/2$ (courbe violete). La ligne verticale marque une asymptote verticale.

3. (a) Pour la solution de l'équation du mouvement on peut utiliser la méthode de séparation de variables,

$$\frac{dx}{x^2} = \beta dt \Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = \beta \int_0^t dt'.$$

En effectuant les intégrations on obtient

$$\frac{1}{x(0)} - \frac{1}{x(t)} = \beta t \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{x(0)}{1 - \beta x(0) t}}$$

Si $\beta > 0$, il y a une "explosion " (singularité) pour $t = \beta x(0)$, tandis que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ pour $\beta < 0$.

(b) Dans une équation du type $\dot{x}_1(t) = \beta x_1(t) x_2(t)$, la présence de molécules de la sorte "2" catalyse (augmente) la production de la sorte "1". Si $1 = 2$, on parle donc d'une autocatalyse.

1. (a) Pour l'équation d'Euler-Lagrange on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(M\dot{x}) = m\ddot{x} = \frac{\partial L}{\partial x} = -V_0 k \sinh kx$$
$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + V_0 k \sinh kx = 0}$$

(b) Par définition, l'hamiltonien est donné par

$$H(p,x) = p\dot{x} - L(x,\dot{x}), \quad \text{où} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad \dot{x} = \dot{x}(x,p).$$

Ici $p = M\dot{x}$ et par conséquent $\dot{x}(x,p) = p/M$. On obtient

$$\boxed{H(p,x) = \frac{p^2}{2M} + V_0(\cosh kx - 1)} \tag{2}$$

et les équations du mouvement de Hamilton deviennent

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{M}, \tag{3}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -V_0 k \sinh kx. \tag{4}$$

(c) Pour $|kx| \ll 1$ on peut approcher $\cosh x \approx 1 + x^2/2$, tel que

$$V_0(\cosh kx - 1) \approx \frac{V_0}{2} k^2 x^2.$$

Par conséquent, la conservation de l'énergie peut exprimée par

$$\boxed{H(p,x) \approx \frac{p^2}{2M} + \frac{V_0}{2} k^2 x^2 = E} \tag{5}$$

et (5) décrit des ellipses dans l'espace de phase (voir cours).

(d) Les équations (3) et (4) montrent que

$$\boldsymbol{X}_c = \begin{pmatrix} x_c \\ p_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est le seul point critique possible. Avec la matrice dynamique

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} \\ -V_0 k^2 \cosh[kx] & 0 \end{pmatrix}$$

on trouve

$$\mathbf{A}_0 \equiv \mathbf{A}(\mathbf{X}_c) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} \\ -V_0 k^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir du polynôme caractéristique,

$$p(\lambda) = |\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{1}| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{M} \\ V_0 k^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{V_0 k^2}{M},$$

on trouve les valeurs propres de $\mathbf{A}_0$ par la condition $p(\lambda) = 0$. On obtient

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{V_0 k^2}{M}}}$$

ce qui indique que $\mathbf{X}_c$ est un foyer. Ceci est confirmé par la forme des trajectoires trouvée en 1c qui montre que $\mathbf{X}_c$ est contourné sans jamais l'atteindre.

2. (a) Le (seul) point critique est

$$\boldsymbol{X}_c = \begin{pmatrix} x_{1,c} \\ x_{2,c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice dynamique on trouve ici une matrice constante qui ne dépend pas des coordonnées (x_1, x_2),

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix}.$$

A partir du polynôme caractéristique,

$$p(\lambda) = |\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{1}| = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha \\ \beta & -\lambda - \gamma \end{vmatrix} = \lambda^2 + \gamma\lambda + \alpha\beta,$$

on trouve les valeurs propres

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha\beta}$$

Il y a trois cas possibles. On voit que $\lambda_{1,2} < 0$ pour les solutions réelles et $\Re\{\lambda_{1,2}\} < 0$ pour les solutions conjugée complexes. Le point critique est donc un point stable.

(b) Avec

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\beta x_1^2 + \frac{1}{2}\alpha x_2^2 \tag{6}$$

on obtient

$$\frac{dG}{dt} = \beta x_1 \dot{x}_1 + \alpha x_2 \dot{x}_2 = \beta x_1(-\alpha x_2) + \alpha x_2(\beta x_1 - \gamma x_2) = -\alpha\gamma x_2^2 \leq 0.$$

Pour $\gamma = 0$, G est donc une constante du mouvement et (6) montre que $G(x_1, x_2) = E$ définit des ellipses dans l'espace de phases. Pour $\gamma > 0$ ces ellipes deviennent des spirales qui se terminent dans le point critique $\mathbf{X}_c$.

(c) En général, le volume de lespace de phases n'est pas conservé, car avec $\mathbf{V} := (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = -\gamma.$$

Seulement si $\gamma = 0$, le volume de l'espace de phases est conservé.

3. L'énergie totale du système est

$$E(t) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} + V(\mathbf{x}),$$

dont le premier terme est l'énergie cinétique. Définissant le vecteur des forces $\mathbf{f} \equiv -\partial V(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ on a

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} = \dot{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \cdot \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ = \dot{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{f} = -\gamma\, \dot{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

La forme canonique pour la (seule) contrainte linéaire pour $\ddot{\mathbf{x}}$ est alors

$$\underbrace{\dot{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{M}}_{\mathbf{A}} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \underbrace{\dot{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{f} - \gamma\, \dot{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}}_{\mathbf{b}=b}.$$

Le système d'équations linéaire pour le vecteur des paramètres $\boldsymbol{\lambda}$,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{f},$$

devient dans ce cas spécifique

$$\dot{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}\, \lambda = -\gamma\, \dot{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}.$$

On trouve alors $\lambda = -\gamma$ et la force contrainte,

$$\boxed{\mathbf{z} = \mathbf{A}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} = -\gamma\, \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}}$$

est ici une force de friction qui mène à l'équation du mouvement

$$\boxed{\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} - \gamma\, \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}} \tag{7}$$