

Electromagnétisme dans des milieux matériels

Gerald R. Kneller

Université d'Orléans/CNRS

Rue Charles Sadron; 45071 Orléans

e-mail: `gerald.kneller@cnrs-orleans.fr`

23 novembre 2020

Table des matières

1	Electromagnétisme dans le vide	3
1.1	Les equations de Maxwell	3
1.2	Champ de déplacement, conservation de charge	3
1.3	Transport d'énergie, vecteur de Poynting	4
1.4	Equations d'onde pour \mathbf{E} et \mathbf{H}	5
1.5	Potentiels du champ électromagnétique statique	7
1.5.1	Potentiel électrostatique	7
1.5.2	Potentiel vectoriel	9
1.6	Potentiels du champ électromagnétique dynamique	9
1.6.1	Potentiel scalaire et vectoriel	9
1.6.2	Equations pour ϕ et \mathbf{A}	10
1.7	Jauges	10
1.7.1	Jauge de Coulomb	11
1.7.2	Jauge de Lorentz	11
1.8	Potentiels retardés	12
2	Introduction de milieux matériels	13
2.1	Champs et potentiels moyennés	14
2.2	Développement multipolaire de $\langle \rho \rangle$ et $\langle \mathbf{j} \rangle$	15
2.2.1	Densité de charges $\langle \rho_m \rangle$	15
2.2.2	Densité de courant $\langle \mathbf{j} \rangle$	17
2.3	Equations de Maxwell macroscopiques	19
2.4	Susceptibilités statiques	20
2.4.1	Milieu homogène et isotrope	20
2.4.2	Milieux homogène et anisotrope	21
3	Champ életrromagnétique à l'interface entre deux milieux diélectriques isotropes	22
3.1	Conditions de bornes	22
3.1.1	Géométrie, équations de Maxwell	22
3.1.2	Conditions limites pour ω et \mathbf{k}	23
3.1.3	Conditions limites pour les champs	25
4	Biréfringence	27
4.1	Relation de dispersion	27
4.2	Solution pour une géométrie particulière	28
5	Un modèle dynamique simple pour un milieu diélectrique homogène et isotrope	30
5.1	Equation du mouvement pour les atomes	30
5.2	Déplacement atomique	31
5.3	Susceptibilité dynamique et statique	32

1 Electromagnétisme dans le vide

1.1 Les equations de Maxwell

La base de la description théorique du champ électromagnétique sont les équations de Maxwell, qui prennent la forme suivante dans le vide :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \nabla \wedge \mathbf{E} & = -\partial_t \mathbf{B}, & \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, & \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \nabla \wedge \mathbf{H} & = \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{j}, & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{array}} \quad (1.1)$$

où $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, et

- \mathbf{E} est le champ électrique,
- \mathbf{D} est champ de déplacement,
- $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ est la permittivité du vide,
- ρ est la densité de charges électriques,
- \mathbf{B} est le champ (induction) magnétique,
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ est la perméabilité du vide,
- \mathbf{H} est l'excitation (champ) magnétique,
- \mathbf{j} est la densité de courant électrique.

Les expressions en parenthèses sont les expressions anciennes. On note que chaque champ est spécifié par sa source et sa circulation.

1.2 Champ de déplacement, conservation de charge

Partant des équations (1.1) on trouve que

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right).$$

Comme $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ il suit que

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0} \quad (1.2)$$

Ceci est une *équation de continuité* qui montre que charge totale du système est conservée. Afin de montrer cela on intègre (1.2) sur un volume V . En appliquant le théorème de Gauss on obtient

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\iiint_V d^3x \rho(\mathbf{x}, t)}_{Q_V} = - \underbrace{\iiint_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)}_{I} = - \underbrace{\iint_{\partial V} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)}_I$$

Ici Q_V est la charge incluse dans le volume V et I est le courant à travers la surface ∂V de V . Si l'on suppose que $|\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)| \propto |\mathbf{x}|^{-(2+\epsilon)}$ ($\epsilon > 0$) si $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, on obtient

$$\boxed{\frac{dQ_{tot}}{dt} = 0} \implies \boxed{Q_{tot} = cste.} \quad (1.3)$$

si $Q_{tot} = \lim_{V \rightarrow \infty} Q_V$ est la charge totale du système. On remarque que $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ joue le rôle d'une densité de courant.

1.3 Transport d'énergie, vecteur de Poynting

Une onde électromagnétique transporte de l'énergie. Partant des équations de Maxwell (1.1) on voit que

$$\begin{aligned}\mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B} &= -\mathbf{H} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}), \\ \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D} &= \mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{H}) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}.\end{aligned}$$

En utilisant que

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})$$

on trouve alors que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \right\} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}.$$

En définissant la *densité d'énergie*

$$\boxed{w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})} \quad (1.4)$$

et le *vecteur de Poynting*

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}} \quad (1.5)$$

on peut écrire

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}} \quad (1.6)$$

Ceci représente une équation de continuité pour l'énergie, similaire à celle pour la charge (voir éq. 1.2)). En appliquant le théorème de Gauss on obtient

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\iiint_V d^3x w(\mathbf{x}, t)}_{E_V} = - \underbrace{\iiint_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)}_{I_E} = - \underbrace{\iint_{\partial V} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)}_{I_E}.$$

Ici E_V est l'énergie contenue dans V et I_E est le courant d'énergie à travers la surface ∂V du volume V . Si $|\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)| \propto |\mathbf{x}|^{-(2+\epsilon)}$ ($\epsilon > 0$) si $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, on obtient

$$\boxed{\frac{dE_{tot}}{dt} = 0} \implies \boxed{E_{tot} = cste.} \quad (1.7)$$

ce qui représente la conservation de l'énergie totale, E_{tot} . On note que les unités de w et \mathbf{S} sont :

$$[w] = \frac{J}{m^3}, \quad (1.8)$$

$$[\mathbf{S}] = \frac{J}{sm^2}. \quad (1.9)$$

Ici on utilise que $[\mathbf{E}] = V/m$, $[\mathbf{H}] = A/m$, $[\epsilon_0] = As/Vm$, $[\mu_0] = Vs/Am$. On rappelle que $VAs = J$.

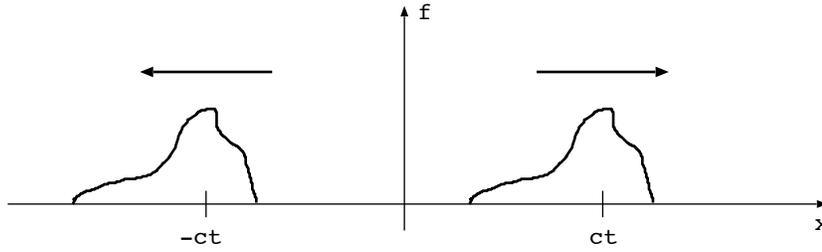


FIGURE 1 – Propagation de deux ondes le long de l'axe x avec des directions de propagation opposées.

1.4 Equations d'onde pour \mathbf{E} et \mathbf{H}

Dans la suite on considère une situation où $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ et $\rho = 0$. Les equations de Maxwell deviennent donc

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \nabla \wedge \mathbf{H} &= \partial_t \mathbf{D}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned} \quad (1.10)$$

On en déduit que

$$\nabla \wedge (\underbrace{\mu_0 \partial_t \mathbf{H}}_{=\partial_t \mathbf{B}}) = -\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = \Delta \mathbf{E} - \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{E}}_{=\rho/\epsilon=0})$$

Comme $\nabla \wedge (\partial_t \mathbf{H}) = \partial_t (\nabla \wedge \mathbf{H})$ et $\nabla \wedge \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D} = \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$ il suit que \mathbf{E} est la solution de l'équation d'onde

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = \mathbf{0}} \quad (1.11)$$

La constante c est la *vitesse de la lumière*,

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} \quad (1.12)$$

Une solution particulière de l'équation d'onde (1.11) est donnée par

$$E_i = c_1 f(x - ct) + c_2 f(x + ct), \quad c_{1,2} = \text{cste.}, \quad (1.13)$$

où E_i sont les les composantes du champ électrique, \mathbf{E} , et f est une fonction quelconque (voir fig. 1). Eq. (1.13) est la superposition de deux ondes avec des directions de propagation opposées le long de l'axe x . De la meme façon on aurait pu construire des ondes qui se propagent le long de y ou z . Si la direction de propagation est donnée par le vecteur d'unité \mathbf{n} ($|\mathbf{n}| = 1$), la solution pour les composantes E_i prend la forme

$$E_i = c_1 f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct) + c_2 f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + ct). \quad (1.14)$$

Une forme particulière sont les ondes planes ($\omega > 0$) :

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mp \omega t])}. \quad (1.15)$$

Pour toute application physique, par exemple pour le calcul d'une densité d'énergie, on doit prendre la partie réelle. Par

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}, \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad (1.16)$$

on définit le *vecteur d'onde*, où λ est la *longueur d'onde*, et

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (1.17)$$

est la *pulsation*. Ici T et ν sont la *période* et la *fréquence* de l'onde plane, respectivement.

Pour que l'onde plane (1.15) vérifie l'équation (1.11) il est nécessaire que

$$\boxed{\omega = c|\mathbf{k}|} \quad (1.18)$$

Ceci est la *relation de dispersion*.

On peut également dériver une équation d'onde pour le champ \mathbf{H} . Dans ce cas on part de

$$\nabla \wedge (\underbrace{\epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}}_{\partial_t \mathbf{D}}) = \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{H}) = \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{H}}_{=0}) - \Delta \mathbf{H}.$$

Comme $\nabla \wedge (\partial_t \mathbf{E}) = \partial_t (\nabla \wedge \mathbf{E})$ et $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}$ on trouve que

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{H} = \mathbf{0}}. \quad (1.19)$$

Comme pour (1.15), des solutions particulières de cette équation sont,

$$\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mp \omega t])}. \quad (1.20)$$

Comme \mathbf{E} et \mathbf{H} vérifient les équations de Maxwell, les ondes planes pour \mathbf{E} et \mathbf{H} ne sont pas indépendantes. Si l'on part de

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]), \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]),$$

on trouve avec $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}$ que

$$\boxed{\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{H}} \quad (1.21)$$

Ceci montre que les vecteurs $\{\mathbf{n}, \mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ forment un tripode de vecteurs orthogonaux (voir la fig. 2) La constante

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega \quad (1.22)$$

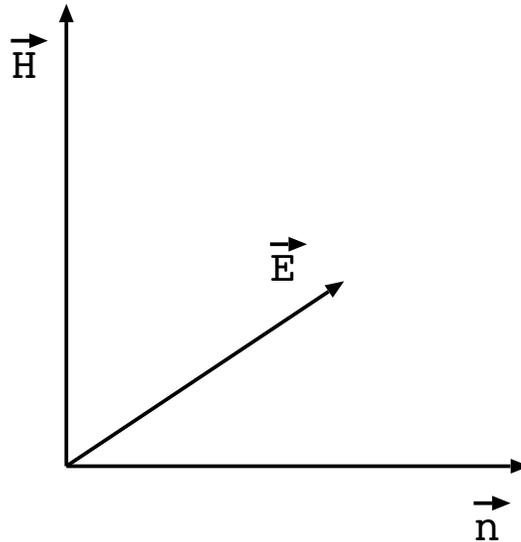


FIGURE 2 – Tripode des vecteurs $\{\mathbf{n}, \mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ pour une onde plane.

est l'impédance caractéristique du vide. On rappelle que $\Omega = V/A$ (Ohm) est l'unité physique pour la résistance électrique.

En combinant (1.21) et (1.5) on voit que le vecteur de Poynting pour une onde électromagnétique dans le vide est co-linéaire avec la direction de propagation \mathbf{n} pour une onde électromagnétique plane,

$$\mathbf{S} \propto \mathbf{n}, \quad (1.23)$$

mais dans ce cas on ne peut pas définir l'énergie totale, E_{tot} , de l'onde, car \mathbf{S} ne décroît pas $\propto |\mathbf{x}|^{2+a}$.

1.5 Potentiels du champ électromagnétique statique

Dans le régime statique on a $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$ et les équations prennent la forme

$$\begin{array}{l} \nabla \wedge \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{array} \quad (1.24)$$

Les équations pour \mathbf{E}/\mathbf{D} et \mathbf{H}/\mathbf{B} sont ici découplées.

1.5.1 Potentiel électrostatique

Comme $\nabla \wedge \mathbf{E} = \mathbf{0}$, \mathbf{E} peut être écrit sous la forme

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (1.25)$$

où $\phi(\mathbf{x})$ est le *potentiel électrostatique* (le signe dans (1.25) est une convention). En utilisant que $\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$, on dérive l'équation de Poisson,

$$\boxed{\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (1.26)$$

Ici $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$ est l'opérateur de Laplace. L'équation (1.26) peut être résolue par en utilisant le *principe de superposition* qui est une conséquence de la linéarité de l'opérateur Δ . Considérons d'abord une charge ponctuelle, Q , située à $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Il est évident que le champ de déplacement correspondant doit posséder une symétrie sphérique. En intégrant la relation $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ sur un volume sphérique de rayon $|\mathbf{x}|$ on obtient

$$\iiint_V d^3x' \rho(\mathbf{x}') = Q = \iiint_V d^3x' \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}') = \oiint_{\partial V} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}') = 4\pi |\mathbf{x}|^2 D(|\mathbf{x}|),$$

et par conséquent

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi |\mathbf{x}|^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 |\mathbf{x}|^2} \mathbf{e}_r, \quad \phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 |\mathbf{x}|},$$

où $\mathbf{e}_r = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Le potentiel électrostatique d'une charge ponctuelle doit vérifier l'équation de Poisson homogène, sauf à $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, car $\rho(\mathbf{x}) = 0$, sauf à $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ceci est effectivement le cas, car

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \quad (1.27)$$

Une distribution de charges quelconque peut être décomposée en éléments de volume infinitésimaux et chaque de ces volumes peut être traité comme une source ponctuelle. Si le volume infinitésimal est situé à \mathbf{x}' et l'observateur à \mathbf{x} , le potentiel électrostatique à la position de l'observateur est donné par

$$\delta\phi(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \frac{d^3x' \rho(\mathbf{x}')}{4\pi \epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

La contribution de tous les volumes est obtenue par intégration des contributions $\delta\phi(\mathbf{x}|\mathbf{x}')$ sur $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$,

$$\boxed{\phi_p(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \iiint d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}} \quad (1.28)$$

Ce principe de superposition est une manifestation de la *linéarité* des équations de Maxwell et des équations différentielles résultantes. On note que la solution complète de (1.26) a la forme

$$\boxed{\phi(\mathbf{x}) = \phi_p(\mathbf{x}) + \phi_0(\mathbf{x})} \quad (1.29)$$

où $\phi_0(\mathbf{x})$ est la solution de l'équation homogène

$$\boxed{\Delta \phi_0 = 0} \quad (1.30)$$

Cette solution peut être utilisée afin de vérifier des conditions de bornes d'un problème donné.

1.5.2 Potentiel vectoriel

Comme $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, le champ \mathbf{B} peut être écrit sous la forme

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}} \quad (1.31)$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est le *potentiel vectoriel*. Ici on utilise que $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0$. En utilisant le deuxième jeu d'équations de (1.24), on dérive une équation pour \mathbf{A} :

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (1.32)$$

Ici on a utilisé que $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$. L'équation (1.32) peut encore être simplifiée. Comme $\nabla \wedge (\nabla f) \equiv 0$ pour une fonction $f(\mathbf{x})$ quelconque, il suit que

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} = \underbrace{\nabla \wedge (\mathbf{A} + \nabla f)}_{\mathbf{A}'}$$

Si $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$ on peut choisir un nouveau potentiel \mathbf{A}' ,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f,$$

où f remplit en particulier la condition $\Delta f = -\nabla \cdot \mathbf{A}$ et $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$. Ceci montre qu'on peut toujours trouver un potentiel vectoriel dont la divergence est nulle, tel que l'équation (1.32) prend la forme plus simple

$$\boxed{\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}} \quad (1.33)$$

En analogie avec (1.28) on trouve une solution particulière de (1.33) par

$$\boxed{\mathbf{A}_p(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}} \quad (1.34)$$

et la solution complète pour \mathbf{A} est

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_p(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_0(\mathbf{x})} \quad (1.35)$$

où $\mathbf{A}_0(\mathbf{x})$ est la solution de l'équation homogène

$$\boxed{\Delta \mathbf{A}_0 = 0} \quad (1.36)$$

1.6 Potentiels du champ électromagnétique dynamique

1.6.1 Potentiel scalaire et vectoriel

On part des équations de Maxwell générales (1.1). Comme dans le cas statique on a $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ et on pose encore une fois

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}} \quad (1.37)$$

Avec ceci on obtient par les E.M. (1.1)

$$\partial_t \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla \wedge \partial_t \mathbf{A} = -\nabla \wedge \mathbf{E} \implies \nabla \wedge (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

Comme $\nabla \wedge \nabla \phi = \mathbf{0}$ pour une fonction scalaire quelconque on peut écrire en analogie avec le cas statique

$$\boxed{\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A} = -\nabla \phi} \quad (1.38)$$

mais contrairement au cas statique, le champ électrique ne peut pas être dérivé à partir d'un potentiel scalaire, ϕ , seul. On remarque que l'expression "potentiel scalaire" remplace l'expression "potentiel électrostatique".

1.6.2 Equations pour ϕ et \mathbf{A}

Comme $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ et $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ on trouve avec (1.38)

$$-\epsilon \nabla \cdot (\nabla \phi + \partial_t \mathbf{A}) = \rho$$

ce qu'on peut écrire dans la forme équivalente

$$\boxed{\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}} \quad (1.39)$$

Afin de trouver une équation différentielle pour \mathbf{A} on part de l'équation de Maxwell $\partial_t \mathbf{D} = \nabla \wedge \mathbf{H} - \mathbf{j}$. En utilisant $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, ainsi que les relations (1.37) et (1.38) on a d'abord

$$\epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi + \partial_t \mathbf{A}) = \nabla \wedge \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{A} \right) - \mathbf{j}.$$

Ici on peut utiliser l'identité $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$. Comme $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, on trouve l'équation suivante pour le potentiel vectoriel

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} \quad (1.40)$$

On remarque que les équations (1.39) et (1.40) sont *couplées*.

1.7 Jauges

Dans le cas des potentiels statiques on a déjà vu que le potentiel vectoriel n'est pas défini d'une manière unique, dans la mesure que tout changement $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ avec

$$\boxed{\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f} \quad (1.41)$$

où f est une fonction scalaire quelconque donne le même champ \mathbf{B} , car $\nabla \wedge \nabla f = \mathbf{0}$. Cette propriété peut être utilisée afin de découpler partiellement ou totalement les équations différentielles (1.39) et (1.40) pour ϕ et \mathbf{A} , respectivement. Contrairement au cas statique, un changement de \mathbf{A} entraîne *a priori* un changement du champ électrique via la relation (1.38). Afin d'éviter un changement de cette quantité physique on doit aussi redéfinir le potentiel scalaire. Comme

$$\mathbf{E}' = -\nabla \phi' - \partial_t \mathbf{A}' = -\nabla \phi' - \partial_t (\mathbf{A} + \nabla f) = -\nabla (\phi' + \partial_t f) - \partial_t \mathbf{A}$$

on voit que ϕ' doit être définie par

$$\boxed{\phi' = \phi - \partial_t f} \quad (1.42)$$

pour que $\mathbf{E}' = \mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A}$. Les remplacements (1.41) et (1.42) doivent être concertés.

1.7.1 Jauge de Coulomb

Ici on choisit le potentiel \mathbf{A} tel que

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0} \quad (1.43)$$

Insertion dans les équations (1.39) donne une équation de Poisson pour le potentiel scalaire

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (1.44)$$

où ρ varie, bien entendu, aussi avec le temps, $\rho \equiv \rho(\mathbf{x}, t)$. Avec la jauge de Coulomb le potentiel scalaire vérifie alors la même équation différentielle que dans le cas statique – voir l'équation de Poisson (1.26). L'expression "jauge de Coulomb" vient du fait qu'on résout formellement un problème électrostatique pour déterminer ϕ .

Concernant le potentiel vectoriel, l'insertion de (1.43) dans (1.40) donne

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \nabla \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} \quad (1.45)$$

Ceci est une *équation d'onde inhomogène*, qui contient des termes de sources. On note que les équations de ϕ et \mathbf{A} sont découplés dans la mesure où on peut d'abord résoudre l'équation pour ϕ , dont le résultat apparaît comme source de l'équation d'onde pour \mathbf{A} .

Comme dans le cas statique, le choix (1.43) mène formellement à une équation pour f dans la forme générale (1.41) de la jauge, $\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \Delta f = 0$.

1.7.2 Jauge de Lorentz

Dans la jauge de Lorentz on demande que \mathbf{A} vérifie

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0} \quad (1.46)$$

Avec cette condition l'équation (1.39) prend la forme d'une équation d'onde *inhomogène*, contenant la densité de charge comme terme de source,

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (1.47)$$

et l'insertion dans (1.39) donne le même type d'équation pour le potentiel vectoriel,

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}} \quad (1.48)$$

Prenant la forme (1.41) de la jauge on a ici comme condition pour f

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} &= \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla f) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi - \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \Delta f \right) = 0. \end{aligned}$$

La fonction f vérifie également une équation d'onde inhomogène.

1.8 Potentiels retardés

Afin de résoudre les équations d'onde inhomogènes (1.47) et (1.48) on procède d'une manière similaire que pour la solution de l'équation de Poisson (voir section 1.5.1). On considère d'abord l'équation d'onde inhomogène pour une source ponctuelle. Dans le cas du potentiel scalaire, ϕ , ce sera une charge ponctuelle dont la valeur dépend du temps, $Q \equiv Q(t)$. Comme dans le cas statique, une source ponctuelle va générer un champ de symétrie sphérique. Si l'on place la source à $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ le champ résultant doit vérifier l'équation d'onde homogène, à l'exception du point $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. En coordonnées sphériques, le laplacien a la forme

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\}$$

et la partie agissant sur les variables angulaires peut-être supprimé dans l'équation d'onde si l'on cherche une solution de symétrie sphérique. Si $\delta\phi(r, t)$ est le potentiel scalaire produit par une source ponctuelle, il doit vérifier

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial t^2} - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right\} \delta\phi = 0. \quad (1.49)$$

On voit facilement que

$$\delta\phi(r, t) = \frac{f(t \mp r/c)}{r}, \quad (1.50)$$

où f est une fonction quelconque, est une solution de l'équation d'onde (1.49). On a d'abord

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right\} \frac{f(t \mp r/c)}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f(t \mp r/c)}{\partial r^2}.$$

D'autre part

$$\frac{\partial f(t \mp r/c)}{\partial r} = \mp \frac{1}{c} \frac{\partial f(t \mp r/c)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(t \mp r/c)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(t \mp r/c)}{\partial t^2},$$

ce qui confirme que (1.50) est une solution de l'équation d'onde homogène (1.49). Afin de retrouver le cas statique, la fonction $f(\cdot)$ doit être spécifiée par $f(\cdot) = Q(\cdot)/(4\pi\epsilon_0)$,

$$\delta\phi(r, t) = \frac{Q(t \mp r/c)}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Dans le cas où l'on considère une distribution de charges continue, $\rho(\mathbf{x}, t)$, et Q représente la charge contenu dans un élément de volume infinitésimal placé à \mathbf{x}' on a

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}') = \frac{d^3x' \rho(\mathbf{x}', t \mp |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (1.51)$$

et on obtient une solution particulière de l'équation d'onde inhomogène (1.47) par intégration sur \mathbf{x}' ,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t \mp |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

A cause du principe de causalité, on doit éliminer la solution contenant l'argument temporel $t + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ dans la densité de charges, car le changement de l'amplitude de la source doit précéder le changement du champ ϕ résultant. Une solution particulière de l'équation (1.47) est donc donnée par

$$\boxed{\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}} \quad (1.52)$$

et pour le potentiel vectorielle on a le résultat analogue

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}} \quad (1.53)$$

On appelle (1.52) et (1.53) les *potentiels retardés* du champ électromagnétique. Il faut bien noter que ces potentiels représentent des solutions particulières des équations (1.47) et (1.48), respectivement, auxquels on peut toujours additionner les solutions de équations homogènes respectives.

2 Introduction de milieux matériels

Concernant la théorie de l'électromagnétisme en présence d'un matériau, on peut toujours prendre une vue totalement "microscopique" et classique, dans la mesure qu'on regarde un matériau comme un ensemble de noyaux atomiques, représentés par des charges ponctuelles positives, qui sont entourés par des électrons, représentés par des charges ponctuelles négatives, qui tournent autour d'eux comme des "planètes" autour le soleil. Dans un tel scénario, les équations de Maxwell (1.1) décrivent tout phénomène électromagnétique, car tout se déroule dans le vide. Cette description microscopique est basée sur description classique de la matière, où les constituants sont des masses ponctuelles dont la dynamique est décrite par les lois de

la mécanique classique. On sait bien qu'une telle description n'est pas valable à l'échelle atomique, où tout phénomène est décrit par les lois de la mécanique quantique. L'électromagnétisme décrit par les équations de Maxwell est pourtant une théorie "pré-quantique", et on est amené à définir des constituants "classiques", comme une molécules, qui suivent les lois de la mécanique classique, mais qui ont des propriétés intrinsèques, comme une polarisation ou une polarisabilité. Afin de pouvoir décrire l'électromagnétisme dans un matériau il convient donc d'adopter une vue "gros grain", où tous les champs et leur sources sont moyennés sur des distances correspondantes au dimensions moléculaires (quelques nm).

2.1 Champs et potentiels moyennés

Du point de vue mathématique une description "gros grain" peut être obtenue par convolution spatiale des quantités en question (champ, densité de charges, etc.) avec une fonction de test, $h(\mathbf{x})$. Si \mathbf{F} est cette quantité, on écrit

$$\langle \mathbf{F} \rangle(\mathbf{x}, t) = \iiint d^3x' \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) h(\mathbf{x}') \quad (2.1)$$

où $h(\mathbf{x})$ est une fonction normalisée

$$\iiint d^3x h(\mathbf{x}) = 1 \quad (2.2)$$

La gaussienne normalisée,

$$h_\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{|\mathbf{x}|^2}{\sigma^2}\right]\right), \quad \sigma > 0. \quad (2.3)$$

où σ est de l'ordre de quelques nm , est un choix possible pour une fonction de test. On remarque que $\lim_{\sigma \rightarrow 0} h_\sigma(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ et que

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \mathbf{F} \rangle(\mathbf{x}, t) &= \partial_t \iiint d^3x' \{ \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \} h(\mathbf{x}') = \\ &= \iiint d^3x' \{ \partial_t \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \} h(\mathbf{x}') = \langle \partial_t \mathbf{F} \rangle(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Pour les dérivées spatiales on a de la même façon

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} \langle \mathbf{F} \rangle(\mathbf{x}, t) &= \partial_{x_i} \iiint d^3x' \{ \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \} h(\mathbf{x}') = \\ &= \iiint d^3x' \{ \partial_{x_i} \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \} h(\mathbf{x}') = \langle \partial_{x_i} \mathbf{F} \rangle(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Comme les équations de Maxwell sont linéaires, on trouve alors que les champs moyennés vérifient les équations de Maxwell, où ρ et \mathbf{j} sont remplacées par $\langle \rho \rangle$ et $\langle \mathbf{j} \rangle$, respectivement :

$$\begin{array}{l} \nabla \wedge \langle \mathbf{E} \rangle = -\partial_t \langle \mathbf{B} \rangle, \quad \nabla \cdot \langle \mathbf{D} \rangle = \langle \rho \rangle, \quad \langle \mathbf{D} \rangle = \epsilon_0 \langle \mathbf{E} \rangle \\ \nabla \wedge \langle \mathbf{H} \rangle = \partial_t \langle \mathbf{D} \rangle + \langle \mathbf{j} \rangle, \quad \nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{B} \rangle = \mu_0 \langle \mathbf{H} \rangle \end{array} \quad (2.4)$$

Si l'on introduit le potentiel scalaire

$$\boxed{\phi^{(av)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3x' \frac{\langle \rho \rangle(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}} \quad (2.5)$$

et le potentiel vectoriel

$$\boxed{\mathbf{A}^{(av)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3x' \frac{\langle \mathbf{j} \rangle(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}} \quad (2.6)$$

les champs moyennés $\langle \mathbf{E} \rangle$ et $\langle \mathbf{B} \rangle$ sont donnés par

$$\boxed{\langle \mathbf{E} \rangle = -\nabla \phi^{(av)} - \partial_t \mathbf{A}^{(av)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\langle \mathbf{B} \rangle = \nabla \wedge \mathbf{A}^{(av)}} \quad (2.7)$$

On note que $\phi^{(av)} \neq \langle \phi \rangle$ et $\mathbf{A}^{(av)} \neq \langle \mathbf{A} \rangle$!

2.2 Développement multipolaire de $\langle \rho \rangle$ et $\langle \mathbf{j} \rangle$

2.2.1 Densité de charges $\langle \rho_m \rangle$

La densité de charges dans un matériau quelconque peut être séparée en une partie de charges ponctuelles libres, qui donne une conductivité électrique, et une partie de charges "liées" aux molécules,

$$\boxed{\rho = \rho_{\text{lib}} + \rho_{\text{mol}}} \quad (2.8)$$

On écrit

$$\rho_{\text{lib}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i(\text{lib})} q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))$$

$$\rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{m(\text{mol})} \rho_m(\mathbf{x}, t).$$

Pour chaque molécule la densité de charges est une somme des contributions de chaque atome,

$$\rho_m(\mathbf{x}, t) = \sum_{j(m)} q_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{jm}(t)),$$

où j compte les atomes dans la molécule.

Dans la suite on considère les densités de charges moléculaires qui donnent les propriétés diélectriques à un matériau. On calcule d'abord $\langle \rho_m \rangle$ par convolution avec une fonction de test, $h(\mathbf{x})$,

$$\langle \rho_m \rangle(\mathbf{x}, t) = \iiint d^3x' \rho_m(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) h(\mathbf{x}') = \sum_{j(m)} q_j h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{jm}(t)).$$

Vu de loin la densité de charge moyennée de chaque molécule peut être développée autour du centre \mathbf{R}_m de la molécule m (voir fig. 3). Comme la

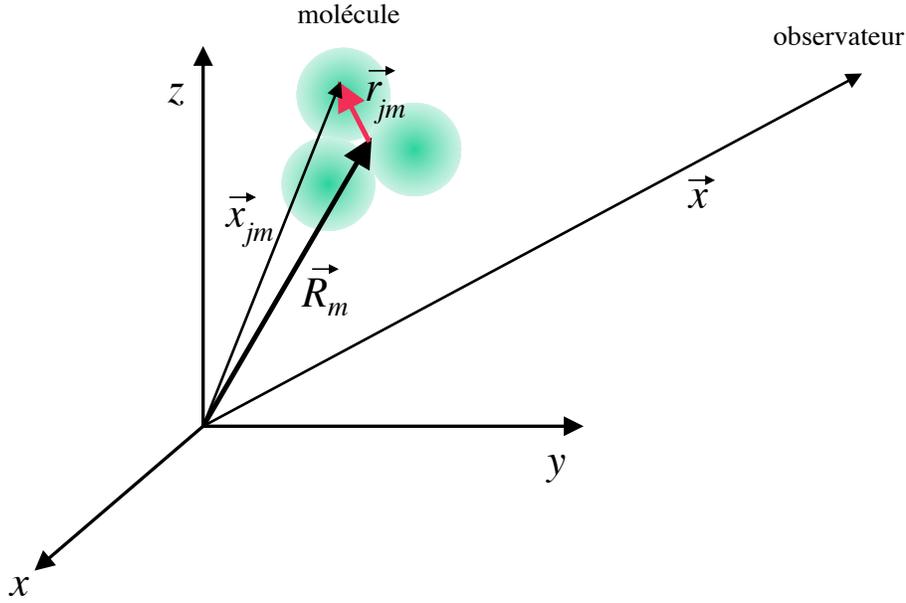


FIGURE 3 – Sketch de la densité de charges pour une molécule. Ici \mathbf{R}_m est le centre de la densité de charges et \mathbf{r}_{jm} est la position du centre de l'atome j dans la molécule m .

position de l'atome j dans la molécule m eut être décomposée sous la forme

$$\mathbf{x}_{jm} = \mathbf{R}_m + \mathbf{r}_{jm} \quad (2.9)$$

et comme

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{jm}| \approx |\mathbf{x} - \mathbf{R}_m|, \quad (2.10)$$

on développe $h(\mathbf{x} - [\mathbf{R}_m + \mathbf{r}_{jm}])$ autour de $\mathbf{r}_{jm} = \mathbf{0}$ en une série de Taylor. Ceci donne

$$\langle \rho_m \rangle(\mathbf{x}, t) = \sum_{j(m)} q_j \left\{ h(\mathbf{x} - \mathbf{R}_m(t)) - \sum_{\alpha} r_{jm}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} h(\mathbf{x} - \mathbf{R}_m(t)) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} r_{jm}^{\alpha} r_{jm}^{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} h(\mathbf{x} - \mathbf{R}_m(t)) \pm \dots \right\}$$

Ici α et β indiquent les composantes cartésiennes de \mathbf{r}_{jm} . En utilisant que

$$q_m = \sum_{j(m)} q_j \quad \text{charge moléculaire ("monopôle")} \quad (2.11)$$

$$p_m^{\alpha} = \sum_{j(m)} q_j r_{jm}^{\alpha} \quad \text{composantes du moment dipolaire} \quad (2.12)$$

$$Q_m^{\alpha\beta} = \sum_{j(m)} q_j r_{jm}^{\alpha} r_{jm}^{\beta} \quad \text{composantes du moment quadrupolaire} \quad (2.13)$$

on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \langle \rho_m \rangle(\mathbf{x}, t) = & q_m h(\mathbf{x} - \mathbf{R}_m(t)) - \sum_{\alpha} p_m^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} h(\mathbf{x} - \mathbf{R}_m(t)) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} Q_m^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} h(\mathbf{x} - \mathbf{R}_m(t)) \pm \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Une autre forme utilise les *densités multipolaires*

$$\eta_m(\mathbf{x}, t) = q_m h(\mathbf{x} - \mathbf{R}_m(t)) \quad \text{densité monopolaire} \quad (2.15)$$

$$\mathcal{P}_m^{\alpha}(\mathbf{x}, t) = p_m^{\alpha}(t) h(\mathbf{x} - \mathbf{R}_m(t)) \quad \text{densité dipolaire} \quad (2.16)$$

$$\mathcal{Q}_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) = Q_m^{\alpha\beta}(t) h(\mathbf{x} - \mathbf{R}_m(t)) \quad \text{densité quadrupolaire} \quad (2.17)$$

Avec ces définitions le développement (2.14) devient

$$\boxed{\langle \rho_m \rangle(\mathbf{x}, t) = \eta_m(\mathbf{x}, t) - \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \mathcal{P}_m^{\alpha}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \mathcal{Q}_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) \pm \dots} \quad (2.18)$$

A partir de (2.15) – (2.17) on définit les quantités *macroscopiques*

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \sum_m \eta_m(\mathbf{x}, t) \quad \text{densité monopolaire macroscopique} \quad (2.19)$$

$$\mathcal{P}^{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \sum_m \mathcal{P}_m^{\alpha}(\mathbf{x}, t) \quad \text{densité dipolaire macroscopique} \quad (2.20)$$

$$\mathcal{Q}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) = \sum_m \mathcal{Q}_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) \quad \text{densité quadrupolaire macroscopique} \quad (2.21)$$

On note que le vecteur $\mathbf{P} \equiv P^1 \mathbf{e}_1 + P^2 \mathbf{e}_2 + P^3 \mathbf{e}_3$ est également appelé *polarisation macroscopique*. La sommation de (2.18) sur toutes les molécules donne alors

$$\boxed{\langle \rho_{\text{mol}} \rangle(\mathbf{x}, t) = \eta(\mathbf{x}, t) - \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \mathcal{P}^{\alpha}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \mathcal{Q}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) \pm \dots} \quad (2.22)$$

2.2.2 Densité de courant $\langle \mathbf{j} \rangle$

Similaire à la densité de charges on peut décomposer la densité de courant en une partie provenant des charges libres et une partie provenant de charges liées aux “molécules”, qui sont éventuellement à remplacer par des sous-ensembles atomiques “non-moléculaires”, en fonction du magnétisme qui est considéré,

$$\boxed{\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{lib}} + \mathbf{j}_{\text{mol}}} \quad (2.23)$$

Ici on écrit

$$\mathbf{j}_{\text{lib}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i(\text{lib})} q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))$$

$$\mathbf{j}_{\text{mol}} = \sum_{m(\text{mol})} \mathbf{j}_m(\mathbf{x}, t),$$

où \mathbf{v}_i est la vitesse de la charge libre i . Pour chaque molécule on a

$$\mathbf{j}_m(\mathbf{x}, t) = \sum_{j(m)} q_j \mathbf{v}_j(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{jm}(t)),$$

où j compte les atomes dans la molécule et \mathbf{v}_j est la vitesse de l'atome j . Si \mathbf{j}_m est moyennée avec une fonction de test, $h(\mathbf{x})$, on obtient

$$\langle \mathbf{j}_m \rangle(\mathbf{x}, t) = \iiint d^3x' \mathbf{j}_m(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) h(\mathbf{x}') = \sum_{j(m)} q_j \mathbf{v}_j(t) h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{jm}(t)).$$

On peut maintenant procéder de la même façon que pour la densité de charge moléculaire, et faire un développement multipolaire de la fonction de test $h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{jm}) = h(\mathbf{x} - [\mathbf{R}_m + \mathbf{r}_{jm}])$ autour de $\mathbf{r}_{jm} = \mathbf{0}$. La vitesse de chaque atome est décomposée sous la forme $\mathbf{v}_{jm} = \mathbf{V}_m + \mathbf{w}_{jm}$, où \mathbf{w}_{jm} est la vitesse relative au centre \mathbf{R}_m . La vitesse du centre \mathbf{R}_m est \mathbf{V}_m . Les détails du développement multipolaire de $\langle \mathbf{j}_m \rangle$ ne seront pas présentés ici (voir le livre de Jackson [1]). On ne donne que le résultat

$$\boxed{\langle \mathbf{j}_m \rangle(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}_m(\mathbf{x}, t) + \partial_t \mathbf{P}_m(\mathbf{x}, t) + \nabla \wedge \mathbf{M}_m(\mathbf{x}, t) + \dots} \quad (2.24)$$

Ici on utilise les définitions

$$\mathbf{J}_m(\mathbf{x}, t) = q_m \mathbf{V}_m(t) h(\mathbf{x} - \mathbf{R}_m(t)) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{M}_m(\mathbf{x}, t) = \sum_{j(m)} \frac{1}{2} q_j (\mathbf{r}_{jm}(t) \wedge \mathbf{w}_{jm}(t)) h(\mathbf{x} - \mathbf{R}_m(t)) \quad (2.26)$$

La sommation sur toutes les molécules donne

$$\boxed{\langle \mathbf{j}_{\text{mol}} \rangle(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \partial_t \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) + \nabla \wedge \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) + \dots} \quad (2.27)$$

On appelle

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_m \mathbf{J}_m(\mathbf{x}, t) \quad \text{densité de courant macroscopique} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \sum_m \mathbf{M}_m(\mathbf{x}, t) \quad \text{aimantation macroscopique} \quad (2.29)$$

2.3 Equations de Maxwell macroscopiques

On part des équations de Maxwell moyennées (2.4) dans lesquelles on approche les séries (2.22) et (2.27), respectivement, par

$$\langle \rho \rangle \approx \eta - \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (2.30)$$

$$\langle \mathbf{j} \rangle \approx \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{P} + \nabla \wedge \mathbf{M}. \quad (2.31)$$

Ici on suppose qu'il n'y a pas de charges libres, tel que $\langle \rho \rangle = \langle \rho_{\text{mol}} \rangle$ et $\langle \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{j}_{\text{mol}} \rangle$. Si l'on définit le *champ de déplacement effectif*

$$\boxed{\mathbf{D}_{\text{eff}} = \epsilon_0 \langle \mathbf{E} \rangle + \mathbf{P}} \quad (2.32)$$

et l'*excitation magnétique effective*

$$\boxed{\mathbf{H}_{\text{eff}} = \frac{\langle \mathbf{B} \rangle}{\mu_0} - \mathbf{M}} \quad (2.33)$$

les équations de Maxwell moyennées prennent la forme

$$\nabla \wedge \langle \mathbf{E} \rangle = -\partial_t \langle \mathbf{B} \rangle, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_{\text{eff}} = \eta. \quad (2.34)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H}_{\text{eff}} = \partial_t \mathbf{D}_{\text{eff}} + \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = 0. \quad (2.35)$$

Il convient de redéfinir la notation des champs

$$\begin{array}{lll} \langle \mathbf{E} \rangle \rightarrow \mathbf{E} & \mathbf{D}_{\text{eff}} \rightarrow \mathbf{D} & \eta \rightarrow \rho \\ \langle \mathbf{B} \rangle \rightarrow \mathbf{B} & \mathbf{H}_{\text{eff}} \rightarrow \mathbf{H} & \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{j} \end{array}$$

Avec ces définitions les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique prennent exactement la même forme que dans le vide, sauf que la définition de \mathbf{D} et \mathbf{B} changent :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, & \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, & \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \nabla \wedge \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{j}, & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \end{array}} \quad (2.36)$$

La "re-définition" de \mathbf{D} et \mathbf{H} correspond à des changements des potentiels du champ électromagnétique. Avec (2.5) et (2.6) et les approximations (2.30) et (2.31) on trouve d'abord

$$\phi(\mathbf{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint d^3x' \frac{\eta(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}) - \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}', \frac{t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.37)$$

pour le potentiel scalaire et

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \approx & \\ & \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}) + \partial_t \mathbf{P}(\mathbf{x}', \frac{t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}) + \nabla' \wedge \mathbf{M}(\mathbf{x}', \frac{t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned} \quad (2.38)$$

pour le potentiel vectoriel. A partir de ϕ et \mathbf{A} on dérive les champs locaux \mathbf{E} et \mathbf{B} par les relations (voir eqs.(1.37), (1.38) et (2.7))

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A}, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}. \quad (2.40)$$

La polarisation et l'aimantation du matériau ont donc un effet retardé compliqué sur le champ électrique et le champ magnétique à un autre endroit, qui vont donner lieu à des champs \mathbf{D} et \mathbf{H} au même endroit via (2.32) et (2.33).

2.4 Susceptibilités statiques

La polarisation d'un matériau peut être

1. le résultat d'une orientation de dipôles moléculaires fixes dans le champ électrique local.
2. le résultat de dipôles induits par le champs électrique local.

Dans le premier cas, le module du moment dipolaire est fixe, mais son orientation est une fonction du champ électrique dans lequel se trouve la molécule. La molécule va s'orienter tel que l'énergie potentiel du dipôle, $W = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{E}$, est minimisé. Ceci est le cas si \mathbf{p}_m est parallèle au champ électrique. Dans le deuxième cas le moment dipolaire est *induit* par le champ électrique. Un tel milieu est *polarisable*. Quelque soit la situation microscopique, la polarisation macroscopique doit être considérée une fonction du champ électrique

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})} \quad (2.41)$$

De la même façon on écrit

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B})} \quad (2.42)$$

où l'aimantation microscopique concerne des sous-ensembles atomiques appropriés pour le description du magnétisme microscopique. On rappelle que \mathbf{E} et \mathbf{B} sont des champs microscopiques moyennés et \mathbf{D} et \mathbf{H} sont des champs effectifs qui reflètent les propriétés du milieu par une *réponse* à \mathbf{E} et \mathbf{B} , respectivement. C'est pour cette raison qu'on appelle \mathbf{E} et \mathbf{B} "champ" électrique et magnétique, respectivement, tout court, pendant que les noms "champ de déplacement" pour \mathbf{D} et surtout "excitation magnétique" pour \mathbf{H} indiquent une réaction du matériau.

2.4.1 Milieu homogène et isotrope

Considérons maintenant la situation où

- le milieu est homogène
- on a le même champ électrique partout
- la réponse de \mathbf{P} à \mathbf{E} est instantanée – on néglige tout effet de retard dans la construction de la polarisation

Dans le *régime linéaire* – indiquant un effet perturbatif faible de la polarisation sur le champ électrique local même – on écrit

$$\boxed{\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}} \quad (2.43)$$

ou χ est la *susceptibilité diélectrique statique*. En analogie on définit la *susceptibilité magnétique statique* par la relation

$$\boxed{\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}}, \quad (2.44)$$

sachant que \mathbf{B} et non \mathbf{H} est la cause pour \mathbf{M} . La définition (2.44) est historique mais reste dans les livres. Afin de relier \mathbf{M} et \mathbf{B} on peut écrire

$$\boxed{\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{\chi_m + 1} \mathbf{B}} \quad (2.45)$$

On note que dans le régime linéaire $\mathbf{M} \propto \mathbf{B}$ implique $\mathbf{M} \propto \mathbf{H}$ et *vice versa*.

En définissant la constante diélectrique ϵ dans un milieu par

$$\boxed{\epsilon = \epsilon_0 + \chi} \quad (2.46)$$

on peut écrire

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}} \quad (2.47)$$

De la même façon on définit la perméabilité μ par

$$\boxed{\mu = \mu_0(1 + \chi_m)} \quad (2.48)$$

tel que

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}} \quad (2.49)$$

Les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique isotrope linéaire ont donc la même forme que dans le vide si ϵ_0 et μ_0 sont remplacées par ϵ et μ , respectivement.

2.4.2 Milieux homogène et anisotrope

Souvent les cristaux ont une propriété intéressante dans la mesure où ils représentent des milieux homogènes, linéaires, mais *anisotropes*. Si on néglige de nouveau tout effet de retardement, les constantes χ et χ_m deviennent des *tenseurs*. On écrit

$$\boxed{\mathbf{P} = \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}} \quad (2.50)$$

pour la polarisation et

$$\boxed{\mathbf{M} = \boldsymbol{\chi}_m \cdot \mathbf{H}} \quad (2.51)$$

pour l'aimantation. On appelle $\boldsymbol{\chi}$ le *tenseur de la susceptibilité diélectrique* et $\boldsymbol{\chi}_m$ le *tenseur de la susceptibilité magnétique*. On note que $\boldsymbol{\chi}$ et $\boldsymbol{\chi}_m$ sont représentés par des matrices symétriques. Si l'on définit le *tenseur diélectrique* par

$$\boxed{\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 \mathbf{1} + \boldsymbol{\chi}} \quad (2.52)$$

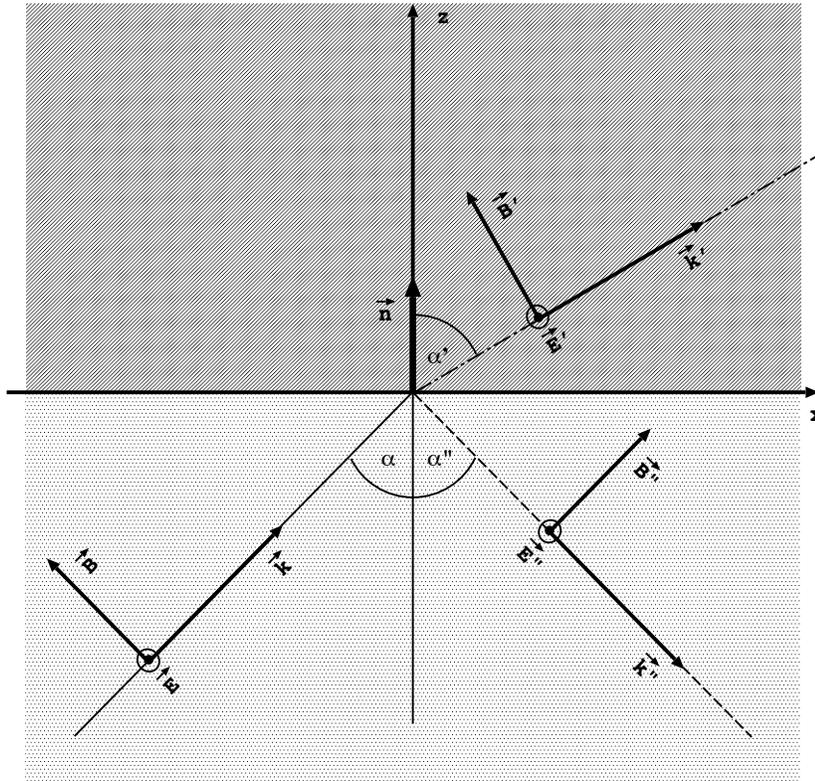


FIGURE 4 – Réflexion d'une onde électromagnétique à une interface plane entre deux milieux isotropes et homogènes semi-infinis (d'après [1]).

et le tenseur de perméabilité par

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_0(\mathbf{1} + \chi_m) \quad (2.53)$$

les champ \mathbf{D} peut être écrit sous la forme

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E} \quad (2.54)$$

et le champ \mathbf{B} prend la forme

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (2.55)$$

3 Champ électromagnétique à l'interface entre deux milieux diélectriques isotropes

3.1 Conditions de bornes

3.1.1 Géométrie, équations de Maxwell

Nous considérons maintenant deux milieux homogènes et isotropes qui sont séparés par une interface plane (voir fig. 4). En absence de sources, $\rho = 0$,

$\mathbf{j} = 0$, les équations de Maxwell prennent la forme

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \mathbf{D} &= \epsilon_i \mathbf{E} \\ \nabla \wedge \mathbf{H} &= \partial_t \mathbf{D}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \mathbf{B} &= \mu_i \mathbf{H} \end{aligned}} \quad (3.1)$$

où ϵ_i et μ_i ($i = 1, 2$) sont la permittivité et la perméabilité du milieu respectif. Dans ces conditions, les champs \mathbf{E}/\mathbf{D} et \mathbf{H}/\mathbf{B} vérifient l'équation d'onde

$$\frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \epsilon_i \mathbf{E}, \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_i \mathbf{H}, \quad (3.3)$$

où $c_i = 1/\sqrt{\mu_i \epsilon_i}$ est la vitesse de lumière dans le milieu i . Des solutions possibles sont les ondes planes,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \exp(i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]), \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 \exp(i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]). \end{aligned}$$

Comme

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}$$

il suit que

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \mathbf{B} = c \mathbf{B}.$$

Comme $c = \omega/k$ on a donc

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}.$$

Ceci est valable dans les deux milieux 1 et 2. D'après la géométrie de la fig. 4, l'onde incidente se propage dans le milieu 1 – en gris clair. A l'interface elle se décompose en une partie réfractée, qui se propage dans le milieu 2 – en gris foncé –, et en une partie réflétée, qui se propage dans le même milieu que l'onde incidente.

3.1.2 Conditions limites pour ω et \mathbf{k} .

A chaque point sur la surface séparant les deux milieux, on impose la continuité du champ électromagnétique, afin de garantir la conservation de l'énergie. On écrit

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}'' = \mathbf{E}', \quad \mathbf{B} + \mathbf{B}'' = \mathbf{B}', \quad (3.4)$$

où \mathbf{E}, \mathbf{B} décrivent l'onde incidente, \mathbf{E}', \mathbf{B}' l'onde réfractée et $\mathbf{E}'', \mathbf{B}''$ l'onde réflétée. Ceci implique d'une part

$$\omega = \omega' = \omega'' \quad (3.5)$$

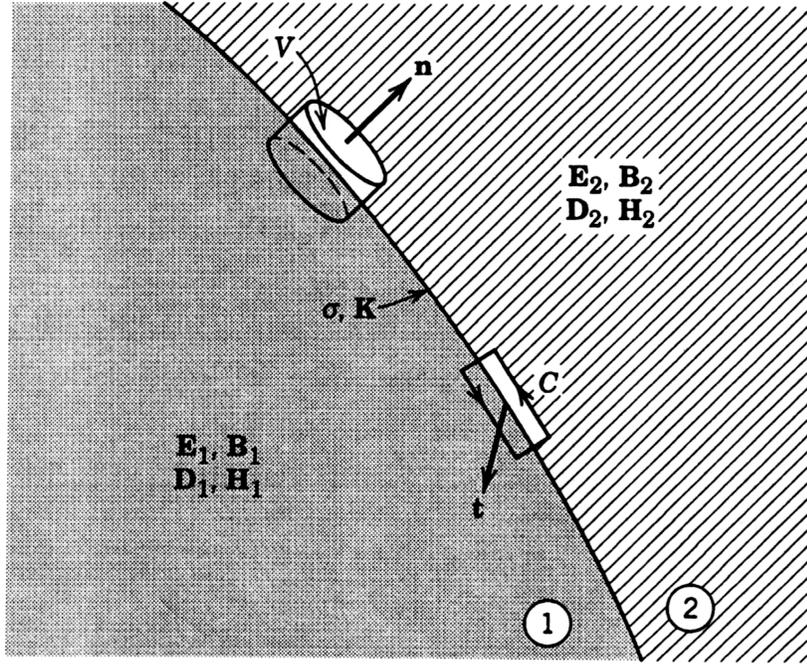


FIGURE 5 – Conditions de bornes pour \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} et \mathbf{H} à l'interface entre deux milieux différents (figure de réf. [1]). Dans le texte $\mathbf{t} \equiv \mathbf{t}_s$.

et d'autre part

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_s = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}_s = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x}_s, \quad (3.6)$$

où \mathbf{x}_s est un point quelconque sur la surface. Par conséquent

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_s &= 0, \\ (\mathbf{k} - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{x}_s &= 0, \\ (\mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{x}_s &= 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''\}$ sont dans un plan. Par conséquent, l'éq. (3.6) peut être écrite sous la forme (voir fig. 4)

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha' = k'' \sin \alpha'',$$

où $k = |\mathbf{k}|$, $k' = |\mathbf{k}'|$ et $k'' = |\mathbf{k}''|$. Avec la relation $k = \omega/c$, qui peut être appliquée de chaque côté de la surface, et la relation (3.5) on obtient

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{c}{c'}}. \quad (3.7)$$

En introduisant l'indice de refraction par

$$\boxed{c = \frac{c_0}{n}} \quad (3.8)$$

la relation (3.7) peut être écrite sous la forme (loi de Snellius)

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{n'}{n}}. \quad (3.9)$$

Pour le passage d'un rayon de lumière de l'air dans un milieu comme un verre, avec $n > 1$, on a donc une réfraction vers la normale de la surface.

3.1.3 Conditions limites pour les champs

Afin de dériver les conditions limites pour les amplitudes des différents champs électromagnétiques, on considère d'abord un petit volume comprenant une partie d'une surface quelconque (pas nécessairement plane) (voir fig. 5). Il suit des équations de Maxwell que

$$\iiint_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{D} = \oiint_{\partial V} da \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \iiint_V d^3x \rho,$$

où V est un volume qui contient la surface séparant les milieux 1 et 2 et ∂V est la surface qui délimite ce volume. Le vecteur d'unité \mathbf{n} est la normale de ∂V en un point précis et $d\mathbf{a} = da \mathbf{n}$ est un élément de surface différentiel en ce point. Si le volume dégénère en un cylindre dont la hauteur tend vers zéro, on obtient (voir fig. 5)

$$\oiint_{\partial V} da \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \approx (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.10)$$

Si l'interface entre les milieux 1 et 2 porte une densité de charges surfacique, σ , on obtient pour l'intégration du volume dégénéré

$$\iiint_V d^3x \rho \approx \sigma da \quad (3.11)$$

et avec (3.10) on obtient donc à la relation

$$\boxed{(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma} \quad (3.12)$$

De la même façon on dérive

$$\boxed{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0} \quad (3.13)$$

à partir de l'équation de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Considérons maintenant les équations de Maxwell impliquant le rotationnel. Pour le champ \mathbf{H} on a par exemple $\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}$. La forme intégrale correspondante s'écrit

$$\oiint_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \wedge \mathbf{H} = \oint_{\partial S} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{H} = \oiint_S d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D})$$

où S est la surface d'une boucle qui encercle les milieux 1 et 2 et ∂S ($\partial S \equiv C$ dans la fig. 5) et le contour qui limite cette surface. Si la surface dégénère tel que les dimensions en direction du vecteur \mathbf{n} tendent vers zéro, on obtient

$$\oint_{\partial S} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{H} \approx (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t}_C \Delta l,$$

où Δl est la dimension de la boucle ∂S tangentielle à la surface 1–2 et le vecteur d'unité \mathbf{t}_C est parallèle à la boucle dégénérée et tangentiel à l'interface 1–2. Introduisant une *densité de courant surfacique*, $\boldsymbol{\kappa}$, on trouve

$$\oiint_S d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}) \approx \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{t}_S \Delta l.$$

Ici \mathbf{t}_S est un vecteur d'unité qui est normal à la surface délimitée par la boucle ∂S . Comme $\partial_t \mathbf{D}$ est supposé continu, il suit que la contribution de ce champ à l'intégrale de surface est nulle et par conséquent

$$\boxed{(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t}_C = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{t}_S} \quad (3.14)$$

Utilisant le même raisonnement pour $\nabla \wedge \mathbf{E} = \partial_t \mathbf{B}$ même à

$$\boxed{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{t}_C = 0} \quad (3.15)$$

Les conditions (3.12), (3.13), (3.14) et (3.15) peuvent maintenant être appliquées à la surface plane en fig. 4. En absence de densités de charges et courants surfaciques, ceci donne d'abord

$$(\mathbf{D} + \mathbf{D}'' - \mathbf{D}') \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.16)$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{B}'' - \mathbf{B}') \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.17)$$

$$(\mathbf{E} + \mathbf{E}'' - \mathbf{E}') \cdot \mathbf{t}_C = 0, \quad (3.18)$$

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}'' - \mathbf{H}') \cdot \mathbf{t}_C = 0, \quad (3.19)$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$, $\mathbf{t}_C = \mathbf{e}_y$. Utilisant $\mathbf{B} = c^{-1} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = \omega^{-1} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}$, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, il suit que

$$(\epsilon_1 [\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0''] - \epsilon_2 \mathbf{E}_0') \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.20)$$

$$(\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \wedge \mathbf{E}_0'' - \mathbf{k}' \wedge \mathbf{E}_0') \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.21)$$

$$(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'' - \mathbf{E}_0') \cdot \mathbf{t}_C = 0, \quad (3.22)$$

$$([\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \wedge \mathbf{E}_0''] / \mu_1 - \mathbf{k}' \wedge \mathbf{E}_0' / \mu_2) \cdot \mathbf{t}_C = 0. \quad (3.23)$$

Avec les conditions de transversalité,

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{E}_0' = 0, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{E}_0'' = 0, \quad (3.25)$$

on obtient donc 6 six équations linéaires pour les 6 composantes des vecteurs \mathbf{E}_0' et \mathbf{E}_0'' . Les amplitudes des champs magnétiques correspondants sont construits via $\mathbf{B}_0 = \omega^{-1} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0$ (sans primes).

4 Biréfringence

4.1 Relation de dispersion

Nous considérons maintenant un milieu diélectrique anisotrope, où

$$\boxed{\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}}. \quad (4.1)$$

La relation $\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$ s'écrit explicitement

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

où la matrice $\boldsymbol{\epsilon}$ est toujours symétrique.

En absence de sources dans le milieu considéré, les équations de Maxwell prennent la forme

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \mathbf{D} &= \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \\ \nabla \wedge \mathbf{H} &= \partial_t \mathbf{D}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned}} \quad (4.3)$$

Avec ceci

$$\begin{aligned} \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\nabla \wedge (\partial_t \mathbf{B}) \\ &= -\partial_t (\nabla \wedge \mathbf{B}) = -\mu_0 \partial_t \underbrace{(\nabla \wedge \mathbf{H})}_{\partial_t \mathbf{D}} = -\mu_0 \partial_t^2 \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Pour le champ électrique on prend une onde plane qui s'exprime en notation matricielle par

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]). \quad (4.4)$$

Avec ceci on obtient

$$\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) - |\mathbf{k}|^2 \mathbf{E}_0 = -\mu_0 \omega^2 \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_0. \quad (4.5)$$

On note que dans le milieu anisotrope considéré ici $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, mais $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$ car \mathbf{E} n'est pas colinéaire à \mathbf{D} . Par conséquent

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 \neq 0, \quad \text{car} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0.$$

Avec

$$\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \mathbf{n} \equiv k \mathbf{n} \quad (4.6)$$

et la définition

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon}_r \quad (4.7)$$

on peut écrire

$$(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T) \cdot \mathbf{E}_0 = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\omega^2}{k^2} \boldsymbol{\epsilon}_r \cdot \mathbf{E}_0. \quad (4.8)$$

Il convient ici d'introduire

$$\alpha := \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\omega^2}{k^2} \right)^{-1} = \frac{c_0^2}{c^2} \quad (4.9)$$

Avec ceci (4.8) devient

$$\epsilon_r \cdot \mathbf{E}_0 = \alpha(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T) \cdot \mathbf{E}_0 \quad (4.10)$$

Il faut bien préciser que ni \mathbf{E}_0 ni α , ou bien c , sont connus pour le moment, mais il doivent être choisis tel que (4.10) est vérifié.

Du point de vue mathématique

$$\mathbf{P} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

est une matrice de projection – ou bref un projecteur – sur l'espace en direction de \mathbf{k} . On a en particulier $\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{a})\mathbf{n}$ pour les composantes d'un vecteur \mathbf{a} quelconque, ainsi que

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^T = \mathbf{P}. \quad (4.12)$$

Le projecteur sur l'espace $\perp \mathbf{k}$ est donné par

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} - \mathbf{P}, \quad (4.13)$$

où $\mathbf{1}$ est la matrice d'unité. On a

$$\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{1}. \quad (4.14)$$

Avec ces définitions l'éq. (4.10) peut être écrite dans la forme compacte

$$\epsilon_r \cdot \mathbf{E}_0 = \alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}_0 \quad (4.15)$$

A cause de la présence du projecteur \mathbf{Q} le problème (4.15) peut être considéré comme un problème de valeurs propres généralisé.

4.2 Solution pour une géométrie particulière

Dans la suite on considère une géométrie particulière, où

$$\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z = k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Dans cette géométrie les projecteurs \mathbf{P} et \mathbf{Q} ont la forme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

En multipliant (4.15) par \mathbf{P} de la gauche on obtient

$$\mathbf{P} \cdot \epsilon_r \cdot \mathbf{E}_0 = \alpha \underbrace{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}_{=0} \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{0},$$

explicitement

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{r,xx} & \epsilon_{r,xy} & \epsilon_{r,xz} \\ \epsilon_{r,yx} & \epsilon_{r,yy} & \epsilon_{r,yz} \\ \epsilon_{r,zx} & \epsilon_{r,zy} & \epsilon_{r,zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \\ E_{0,z} \end{pmatrix} \\ = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_{r,zx} & \epsilon_{r,zy} & \epsilon_{r,zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \\ E_{0,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La dernière équation est non-triviale,

$$\epsilon_{r,zx}E_{0,x} + \epsilon_{r,zy}E_{0,y} + \epsilon_{r,zz}E_{0,z} = 0,$$

et permet d'exprimer $E_{0,z}$ en fonction de $E_{0,x}$ et de $E_{0,y}$,

$$\boxed{E_{0,z} = -\frac{1}{\epsilon_{r,zz}}(\epsilon_{r,zx}E_{0,x} + \epsilon_{r,zy}E_{0,y})} \quad (4.18)$$

Ceci peut être utilisé dans l'eq. (4.15) qui prend la forme

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{r,xx} & \epsilon_{r,xy} & \epsilon_{r,xz} \\ \epsilon_{r,yx} & \epsilon_{r,yy} & \epsilon_{r,yz} \\ \epsilon_{r,zx} & \epsilon_{r,zy} & \epsilon_{r,zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \\ E_{0,z}(E_{0,x}, E_{0,y}) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \\ E_{0,z}(E_{0,x}, E_{0,y}) \end{pmatrix},$$

où $E_{0,z}(E_{0,x}, E_{0,y})$ est donné par (4.18). Explicitement on obtient les équations suivantes

$$\begin{aligned} \epsilon_{r,xx}E_{0,x} + \epsilon_{r,xy}E_{0,y} - \frac{\epsilon_{r,xz}}{\epsilon_{r,zz}}(\epsilon_{r,zx}E_{0,x} + \epsilon_{r,zy}E_{0,y}) &= \alpha E_{0,x} \\ \epsilon_{r,yx}E_{0,x} + \epsilon_{r,yy}E_{0,y} - \frac{\epsilon_{r,yz}}{\epsilon_{r,zz}}(\epsilon_{r,zx}E_{0,x} + \epsilon_{r,zy}E_{0,y}) &= \alpha E_{0,y} \\ \underbrace{\epsilon_{r,zx}E_{0,x} + \epsilon_{r,zy}E_{0,y} - \frac{\epsilon_{r,zz}}{\epsilon_{r,zz}}(\epsilon_{r,zx}E_{0,x} + \epsilon_{r,zy}E_{0,y})}_{=0} &= 0. \end{aligned}$$

Sous forme matricielle on a

$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_{r,xx} - \frac{\epsilon_{r,xz}}{\epsilon_{r,zz}}\epsilon_{r,zx} & \epsilon_{r,xy} - \frac{\epsilon_{r,xz}}{\epsilon_{r,zz}}\epsilon_{r,zy} \\ \epsilon_{r,yx} - \frac{\epsilon_{r,yz}}{\epsilon_{r,zz}}\epsilon_{r,zx} & \epsilon_{r,yy} - \frac{\epsilon_{r,yz}}{\epsilon_{r,zz}}\epsilon_{r,zy} \end{pmatrix}}_{\epsilon_r^\perp} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_0^\perp} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_0^\perp}} \quad (4.19)$$

On obtient donc un problème de valeurs propres dans l'espace perpendiculaire au vecteur \mathbf{k} – ici dans le plan (x, y) ,

$$\boxed{\boldsymbol{\epsilon}_r^\perp \cdot \mathbf{E}_0^\perp = \alpha \mathbf{E}_0^\perp} \quad (4.20)$$

Comme la matrice $\boldsymbol{\epsilon}$ est symétrique, ceci est vrai pour $\boldsymbol{\epsilon}_r$ et pour $\boldsymbol{\epsilon}_r^\perp$. Le problème (4.20) donne donc deux valeurs propres α_1 et α_2 et deux vecteurs propres $\mathbf{E}_{0,1}^\perp$ et $\mathbf{E}_{0,2}^\perp$ associés qui sont mutuellement orthogonaux. On obtient donc d'abord deux vitesses de lumière

$$\boxed{c_j = \frac{c_0}{\sqrt{\alpha_j}}, \quad j = 1, 2} \quad (4.21)$$

et pour une pulsation ω donnée, deux vecteurs d'onde (notation matricielle)

$$\boxed{\mathbf{k}_j = \sqrt{\alpha_j} \frac{\omega}{c_0} \mathbf{e}_z, \quad j = 1, 2} \quad (4.22)$$

Dans la forme générale (4.4) pour le champ électrique on écrit

$$\boxed{\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{0,i}^\perp \\ E_{0,z}(\mathbf{E}_{0,i}^\perp) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2} \quad (4.23)$$

Comme \mathbf{E}_0 a une composante z non-nulle, le le champ électrique n'est pas transversal, i.e. non perpendiculaire à \mathbf{k} . Pour un milieu isotrope, le tenseur de permittivité a la forme $\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon \mathbf{1}$, et (4.18) montre que $E_{0,z} = 0$. Dans ce cas on retrouve donc le cas connu, où le champ électrique est transversal (voir par exemple les ondes électromagnétiques dans le vide).

Le champ magnétique est également donné par une onde plane,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp(i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]), \quad (4.24)$$

Comme $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \wedge \mathbf{E}$ on obtient avec (4.4) et (4.24) $-i\omega \mathbf{B}_0 = -i\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0$, ou bien

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 \quad (4.25)$$

où \mathbf{E}_0 est donné par (4.23). On note que $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{k}$, ce qui reflète $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

5 Un modèle dynamique simple pour un milieu diélectrique homogène et isotrope

5.1 Equation du mouvement pour les atomes

Partant de la définition de la polarisation macroscopique (2.20) on écrit

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \sum_m \sum_{j(m)} \mathbf{p}_{jm}(t) h(\mathbf{x} - \mathbf{R}_j(t)) \quad (5.1)$$

Ici \mathbf{p}_{jm} est la polarisabilité de l'atome j dans la molécule m . Si \mathbf{u}_{jm} est l'écart de la position de cet atome dans par rapport à sa position d'équilibre on pose que

$$\boxed{\mathbf{p}_{jm} = q_j \mathbf{u}_{jm}} \quad (5.2)$$

Dans la suite on considère un matériau *homogène et isotrope* dont la polarisation induite peut être décrite par un seul atome "représentatif". Comme le matériau est isotrope, on considère le déplacement de l'atome représentatif dans une direction quelconque. On écrit par exemple

$$\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x,$$

$$\mathbf{p} = p \mathbf{e}_x,$$

$$\mathbf{E} = E \mathbf{e}_x,$$

où \mathbf{e}_x est le vecteur d'unité dans la direction "x" d'un système de coordonnées cartésien. On suppose que le mouvement de l'atome peut être modélisé par un oscillateur harmonique avec friction :

$$\boxed{M\ddot{u} + \Gamma\dot{u} + ku = qE(t)} \quad (5.3)$$

Ici M est la masse de l'atome qui se déplace sous l'influence de la force externe, $eE(t)$, une force de rappel, $F_h = -ku$ ($k > 0$), et une force de friction $F_\Gamma = -\Gamma\dot{u}$ ($\Gamma > 0$). Ici k est la constante de force et Γ est la constante de friction. Avec les définitions $\gamma = \Gamma/M$ et $\omega_0^2 = k/M$ l'équation du mouvement (5.3) devient

$$\ddot{u} + \gamma\dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{qE(t)}{M}. \quad (5.4)$$

5.2 Déplacement atomique

La solution du type d'équation différentielle (5.4) est présentée dans tous les textes standards sur les mathématiques pour les sciences physiques/de l'ingénieur (par exemple le dans le cours "Techniques Mathématiques"), et nous donnons ici la solution sous forme raccourcie. Si l'on suppose que $E(t) = 0$ si $t < 0$, nous pouvons utiliser la transformation de Laplace qui est définie par $\hat{f}(s) = \int_0^\infty dt \exp(-st)f(t)$ ($\Re\{s\} > 0$) pour une fonction $f(t)$ quelconque. Application à (5.4) donne

$$\{s^2\hat{u}(s) - su(0) - \dot{u}(0)\} + \gamma\{s\hat{u}(s) - \dot{u}(0)\} + \omega_0^2\hat{u}(s) = \frac{q\hat{E}(s)}{M}.$$

Si l'on pose $u(0)$ et $\dot{u}(0) = 0$ on trouve que

$$\hat{u}(s) = \frac{q}{M} \underbrace{\frac{1}{s^2 + \gamma s + \omega_0^2}}_{\hat{g}(s)} \hat{E}(s). \quad (5.5)$$

En utilisant le théorème de convolution de la transformée de Laplace, la solution pour $u(t)$ peut être écrit sous la forme

$$\boxed{u(t) = \frac{q}{M} \int_0^t d\tau g(t - \tau) E(\tau)} \quad (5.6)$$

La forme du noyau $g(t)$ est trouvée par transformation de Laplace inverse de $\hat{g}(s)$ qui sort de l'équation algébrique (5.5),

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{s^2 + \gamma s + \omega_0^2}. \quad (5.7)$$

Introduisant la fréquence Ω par

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (5.8)$$

les zéros du dénominateur de $\hat{g}(s)$ sont données par

$$s_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\Omega \quad (5.9)$$

et en utilisant la définition de la transformation de Laplace inverse on peut écrire

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C ds \frac{\exp(st)}{(s - s_1)(s - s_2)} = \left\{ \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\exp(st)}{s - s_2} + \lim_{s \rightarrow s_2} \frac{\exp(st)}{s - s_1} \right\}.$$

Ici C est un contour qui contient les pôles $s_{1,2}$, et on utilise le théorème de résidus. Avec (5.9) et (5.8) et $g(t) \equiv 0$ pour $t < 0$ on trouve alors

$$\boxed{g(t) = \Theta(t) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \frac{\sin \Omega t}{\Omega}} \quad (5.10)$$

On utilise la notation $\Theta(t)$ pour la fonction de Heaviside qui a la propriété $\Theta(t) = 1$ si $t \geq 0$, et $\Theta(t) = 0$ si $t < 0$. La fréquence Ω devient imaginaire si $\gamma/2 > \omega_0$. Dans ce cas l'oscillateur est "sur-amorti" et $g(t)$ devient (voir fig. 6)

$$g(t) = \Theta(t) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \frac{\sinh |\Omega| t}{|\Omega|}. \quad (5.11)$$

5.3 Susceptibilité dynamique et statique

En utilisant la relation $\mathbf{p}_a = q\mathbf{u}$, qui définit la *polarisation atomique*, on trouve avec la relation (5.6) pour la relation entre le déplacement $u(t)$

$$\boxed{\mathbf{p}_a(t) = \int_0^t d\tau \phi^{(a)}(t - \tau) \mathbf{E}(\tau)} \quad (5.12)$$

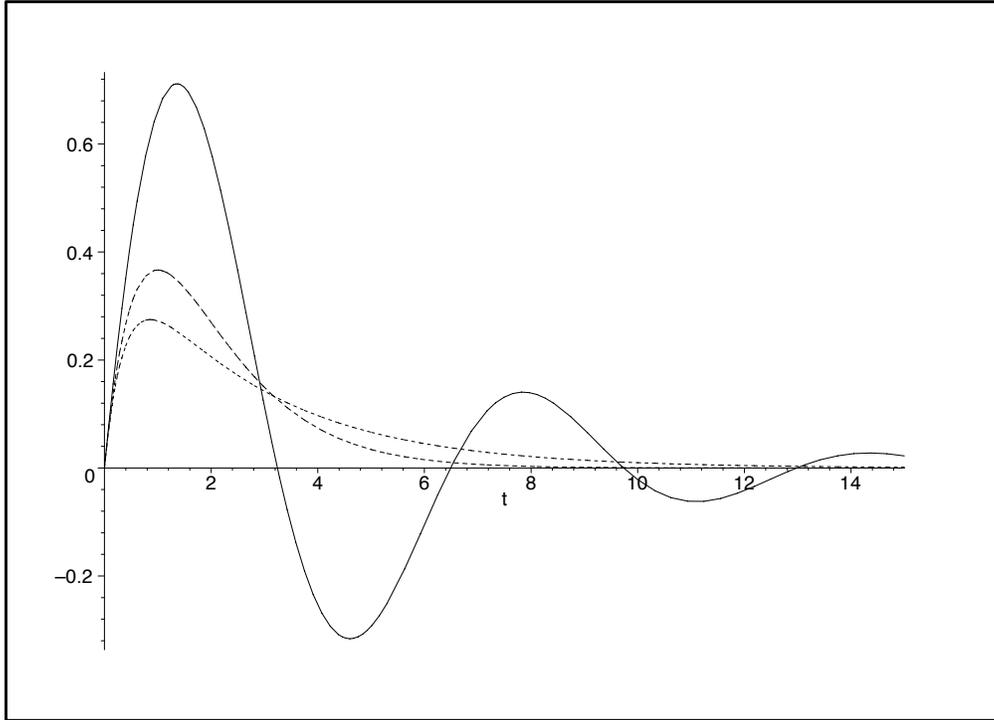


FIGURE 6 – La fonction de transfert $g(t)$ de l'équation différentielle (5.4). Les paramètres sont $\omega_0 = 1$ et $\gamma = 0.5, 2, 3$.

où $\phi^{(a)}(t)$ est la *susceptibilité atomique dynamique*

$$\boxed{\phi^{(a)}(t) = \frac{q^2}{M} g(t)} \quad (5.13)$$

Ici on a utilisé que le système est homogène et isotrope. On regarde maintenant la situation où le champ électrique a la forme

$$\mathbf{E}(t) = \Theta(t) \mathbf{E}_0, \quad (5.14)$$

où \mathbf{E}_0 est un vecteur constant. On "allume" donc un champ électrique constant à $t = 0$. Utilisant que la transformée de Laplace de la fonction échelon $\Theta(t)$ est donnée par $\hat{\Theta}(s) = 1/s$, la polarisation atomique $\mathbf{p}_a(t)$ peut être écrite sous la forme

$$\mathbf{p}_a(t) = \frac{\mathbf{E}_0}{2\pi i} \oint_C ds \exp(st) \frac{\hat{\phi}^{(a)}(s)}{s} = \frac{q^2 \mathbf{E}_0}{M} \oint_C ds \exp(st) \frac{\hat{g}(s)}{s}.$$

En utilisant que

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)},$$

où $s_{1,2} = -\gamma/2 \pm i\Omega$, on trouve pour la polarisation atomique

$$\mathbf{p}_a(t) = \Theta(t) \frac{q^2 \mathbf{E}_0}{M\omega_0^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \left\{ \cos \Omega t + \frac{\gamma}{2\Omega} \sin(\Omega t) \right\} \right] \quad (5.15)$$

On voit que

$$\mathbf{p}_a(\infty) = \chi_a \mathbf{E}_0 \quad (5.16)$$

où χ_a est la *susceptibilité atomique statique* du modèle,

$$\chi_a = \frac{q^2}{M\omega_0^2}$$

Le dernier point peut être généralisée pour un modèle dynamique quelconque. En général on aura

$$\mathbf{p}_a(t) = \frac{\mathbf{E}_0}{2\pi i} \oint_C ds \exp(st) \frac{\hat{\phi}^{(a)}(s)}{s} = \mathbf{E}_0 \hat{\phi}^{(a)}(0) + \text{termes décroissants avec } t.$$

Si $\hat{g}(0) \neq 0$, il y a toujours un terme statique qui reste présent dans la limite $t \rightarrow \infty$, et on peut écrire

$$\mathbf{p}_a(\infty) = \chi_a \mathbf{E}_0 \quad (5.17)$$

où la susceptibilité atomique statique χ_a est donnée par

$$\chi_a = \hat{\phi}^{(a)}(0) = \int_0^\infty dt \phi^{(a)}(t) \quad (5.18)$$

On note que $\hat{\phi}_a(0) = \int_0^\infty dt \phi^{(a)}(t)$.

Dans la section 2.4 on a introduit les susceptibilités statiques au niveau *macroscopique*. Comme on décrit un matériau homogène, la relation (5.1) peut être écrite sous la forme

$$\mathbf{P}(t) = \frac{N}{V} p_a(t) \quad (5.19)$$

qui montre bien que le vecteur $\mathbf{P}(t)$ représente une densité dipolaire. Avec ceci on écrit

$$\mathbf{P}(t) = \int_0^t d\tau \phi(t - \tau) \mathbf{E}(\tau), \quad (5.20)$$

où $\phi(\cdot)$ est la *susceptibilité dynamique*,

$$\phi(t) = \frac{N}{V} \phi_a(t). \quad (5.21)$$

La *susceptibilité statique*, qui a été introduite en Section 2.4 est obtenue d'une manière analogue

$$\chi = \frac{N}{V} \chi_a \quad (5.22)$$

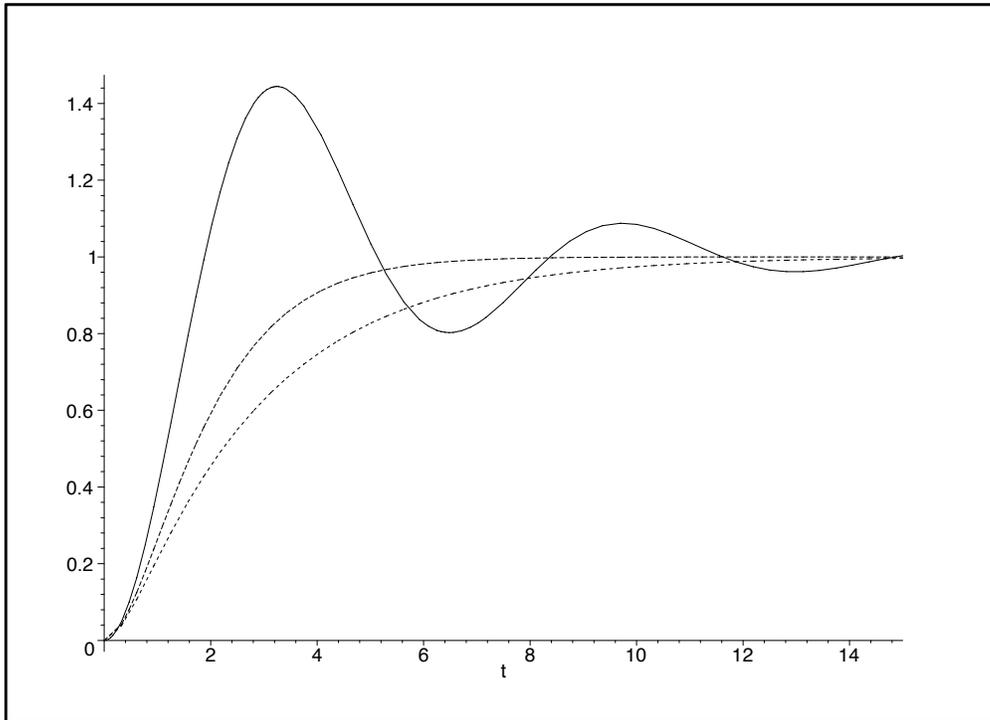


FIGURE 7 – La polarisation atomique pour un oscillateur harmonique amorti. Les conditions initiales sont $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ et les paramètres sont $qE_0/M = 1$, $\omega_0 = 1$, et $\gamma = 0.5, 2, 3$. Les valeurs pour ω_0 et γ sont les mêmes que dans la fig. 6. Ici $|\mathbf{p}_a(t)|$ est normalisé tel que $|\mathbf{p}_a(\infty)| = 1$.

Références

- [1] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, 3rd edition, 1999.
- [2] J. Faroux, J.-P. et Renault. *Electromagnétisme*, volume 1, 2. Dunod, Paris, 1996.
- [3] J.-P. Pérez. *Optique - Fondements et applications*. Dunod, Paris, 2000.
- [4] E. Hecht and A. Zajak. *Optics*. Addison Wesley, 1979.
- [5] M.R. Spiegel. *Analyse vectorielle*. Série SCHAUM. McGraw Hill, 2000.