Exercices Mécanique Quantique - Master Physique
Matrices, rotations

1. Le moment magnétique d'un électron est $\mu_e = g\mu_B$, où $\mu_B = \hbar e/(4m_e)$ est le magnéton de Bohr et $g \approx 2$. Ici m_e dénote la charge de l'électron et e sa charge. Comparer cette valeur avec celle d'une sphère qui porte la charge e et dont le moment cinétique intrinsèque autour de l'axe z est $\hbar/2$. On suppose que la densité de charge ρ dans la sphère est la densité de masse sont constantes. Utiliser que le vecteur du moment magnétique et le moment d'inertie d'une sphère de masse m et de rayon a sont $\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int d^3r\, \vec{r} \wedge (\rho\vec{v})$ et $I_s = 2ma^2/5$, respectivement.
2. Où dans le plan complexe sont situées les valeurs propres d'une matrice unitaire ?
3. Les matrices de Pauli sont données par
$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer qu'elles vérifient les relations
      i. $[\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y] = i\boldsymbol{\sigma}_z$ (cycl.)
      ii. $\mathrm{tr}\{\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\sigma}_j\} = 2\delta_{kj}$

      On note que $\mathrm{tr}\{\mathbf{A}\} = \sum_{i=1}^n A_{ii}$ si $\mathbf{A}$ est une matrice de dimensions $n \times n$ et que $\mathrm{tr}\{\mathbf{AB}\} = \mathrm{tr}\{\mathbf{BA}\}$ ($\mathbf{B}$ a les même dimensions que $\mathbf{A}$).

   (b) Calculer leurs valeurs et vecteurs propres
4. On donne la matrice
$$\mathbf{U}(\mathbf{n}, \phi) = \cos(\phi/2)\mathbf{1} + i\sin(\phi/2)(n_x\boldsymbol{\sigma_x} + n_y\boldsymbol{\sigma_y} + n_z\boldsymbol{\sigma_z})$$
   où $\boldsymbol{\sigma}_{x,y,z}$ sont les matrices de Pauli et $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ contient les composantes d'un vecteur d'unité $\vec{n}$ par rapport à la base d'un espace euclidien, tel que $\mathbf{n}^T\mathbf{n} = 1$.

   (a) Définissant $\mathbf{N} = n_x\boldsymbol{\sigma_x} + n_y\boldsymbol{\sigma_y} + n_z\boldsymbol{\sigma_z}$, montrer que
      i. $\mathbf{N}^2 = \mathbf{1}$,
      ii. $\mathbf{N}$ est une matrice hermitienne.
      iii. Montrer que $\mathbf{U}$ est unitaire et calculer $\det(\mathbf{U})$.

   (b) On donne la représentation d'un vecteur dans l'espace des spineurs par
$$\boldsymbol{\xi} = x\boldsymbol{\sigma}_x + y\boldsymbol{\sigma}_y + z\boldsymbol{\sigma}_z.$$
      Calculer $\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{U}^\dagger(\vec{n}, \epsilon)\boldsymbol{\xi}\mathbf{U}(\vec{n}, \epsilon)$, pour $|\epsilon| \ll 1$.
5. On donne la matrice
$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que $\mathbf{K}^2 = \mathbf{1}$.

   (b) Montrer que $\mathbf{A}(\phi) = \exp(\phi\mathbf{K}) = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) \end{pmatrix}$

   (c) Soit la "norme" $\|\mathbf{r}\|$ de $\mathbf{r} \equiv (x, y)^T$ $(x, y \in \mathbb{R})$ définie par $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{|x^2 - y^2|}$. Montrer que $\|\tilde{\mathbf{r}}\| = \|\mathbf{r}\|$, où $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{A}(\phi)\mathbf{r}$.

1. On donne le champ magnétique

$$\vec{B} = B\sin\varphi\,\vec{e}_x + B\cos\varphi\,\vec{e}_z,$$

   où $\varphi \in [0, 2\pi)$.

   (a) Donner la représentation matricielle $\mathbf{H}$ de l'hamiltonien en utilisant la forme des matrices de Pauli introduites dans le cours.

   (b) Calculer les énergies possibles du spin.

   (c) Calculer les spineurs propres de $\mathbf{H}$. Conseil : Construire $\vec{B}$ par rotation à partir de $\vec{B}_0 = B\vec{e}_z$ et utiliser la formule de rotation correspondante pour les spineurs.

2. On donne un champ magnétique constant, $\vec{B} = B\vec{e}_z$, et on considère un "spin 1/2" dont l'état pour $t = 0$ est décrit par le spineur

$$\boldsymbol{\chi}(0) = \cos\phi\,\boldsymbol{\chi}_z^+ + \sin\phi\,\boldsymbol{\chi}_z^- = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix},$$

   où $\phi \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{\chi}_z^+$ et $\boldsymbol{\chi}_z^-$ décrivent, respectivement, une polarisation parallèle et antiparallèle à l'axe z dans un repère cartésien.

   (a) Calculer $\boldsymbol{\chi}(t)$ pour le champ magnétique donné.

   (b) Calculer les valeurs moyennes $\langle s_i(t)\rangle$ pour les composantes $i = x, y, z$ du spin. Quelle trajectoire est décrite par la pointe du vecteur $\langle \vec{s}(t)\rangle$?

3. On donne les matrices

$$\mathbf{S}_x = i\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = i\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_z = i\hbar\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   qui représentent un spin d'amplitude $\hbar$.

   (a) Construire la matrice $\mathbf{H}$ qui représente l'hamiltonien pour un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{n}$, où $\vec{n} = n_x\vec{e}_x + n_y\vec{e}_y + n_z\vec{e}_z$ est un vecteur d'unité dans une direction quelconque. Montrer que $\mathbf{H}$ est une matrice hermitienne.

   (b) i. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres (normalisés) correspondants de la matrice $\mathbf{H}$ si $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

   ii. Soient $\lambda_+, \lambda_0, \lambda_-$ les valeurs propres, où $\lambda_+ < \lambda_0 < \lambda_-$, et soient $\boldsymbol{\chi}_+, \boldsymbol{\chi}_0, \boldsymbol{\chi}_-$ les spineurs propres associés. Quelle est la signification physique de ces valeurs propres et à quelle orientation du spin par rapport au champ magnétique correspondent-elles ?

   iii. Calculer l'énergie moyenne du spin pour l'état représenté par $\boldsymbol{\chi} = \alpha_+\boldsymbol{\chi}_+ + \alpha_0\boldsymbol{\chi}_0 + \alpha_-\boldsymbol{\chi}_-$, où $|\alpha_+|^2 + |\alpha_0|^2 + |\alpha_-|^2 = 1$.

1. Soient $|u\rangle$ et $|v\rangle$ deux vecteurs complexes normalisés, $\langle u|u\rangle = 1$, $\langle v|v\rangle = 1$, et $|v\rangle = c|u\rangle$ ($c \in \mathbb{C}$). Quelle est la forme la plus générale pour c si $|u\rangle$ et $|v\rangle$ sont des éléments d'un espace vectoriel réel et complexe, respectivement ?
2. Soit $|u\rangle$ un vecteur d'unité dans un espace vectoriel unitaire à deux dimensions. Combien de vecteurs normalisés et orthogonaux à $|u\rangle$ y a-t-il ? La même question si l'espace vectoriel est réel. (Utiliser une base orthonormée pour exprimer les vecteurs dans cet espace vectoriel.)
3. Soit $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ une base orthonormée d'un espace vectoriel unitaire à deux dimensions ("base A"). On donne une deuxième base ("base B") dans cet espace par

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|a_1\rangle + i|a_2\rangle\}\,, \quad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|a_1\rangle - i|a_2\rangle\}\,.$$

   (a) Montrer que la base B est orthonormée.
   (b) Donner la représentation matricielle de $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ et de $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$ dans la base A.
   (c) Donner la représentation matricielle de $\langle b_1|$ et $\langle b_2|$ dans la base A
   (d) Donner la représentation matricielle de $|a_1\rangle$ et $|a_2\rangle$ dans la base B.
   (e) Construire l'opérateur unitaire U qui est défini par $|b_j\rangle = U|a_j\rangle$ ($j = 1, 2$) et donner sa représentation matricielle dans la base A.
   (f) Soit $|\chi\rangle$ un vecteur dont la représentation matricielle dans la base A est donnée par

$$\boldsymbol{\chi}^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Quelle est la représentation dans la base B ?
   (g) Soit T un opérateur qui a la représentation matricielle dans la base A est

$$\mathbf{T}^{(A)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Quelle est la représentation dans la base B ?
4. Soit $T = |u\rangle\langle u|$ un opérateur dans un espace unitaire à n dimensions.
   (a) Est-ce que T est hermitien ?
   (b) Quelle propriété doit posséder le vecteur $|u\rangle$ afin que T soit un projecteur ? (Rappel : Un projecteur P a les propriétés $P^2 = P$ et $P^\dagger = P$.)
   (c) Montrer que les valeurs propres de P sont ou 0 ou 1.

1. La dérivée d'un opérateur A qui dépend d'un paramètre λ est donnée par
$$\frac{dA}{d\lambda} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{A(\lambda+\epsilon) - A(\lambda)}{\epsilon}.$$
Montrer que
(a) $\dfrac{d}{d\lambda}(AB) = \dfrac{dA}{d\lambda}B + A\dfrac{dB}{d\lambda}$.
(b) $\dfrac{d}{d\lambda}A^{-1} = -A^{-1}\dfrac{dA}{d\lambda}A^{-1}$.
(c) $\dfrac{d}{d\lambda}\exp(\lambda C) = C\exp(\lambda C) = \exp(\lambda C)C$, si C ne dépend pas de λ.
(d) $\dfrac{d}{d\lambda}A^n = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} A^{l-1}\frac{dA}{d\lambda}A^{n-l} \quad (n \geq 1)$.
Avec ces résultats calculer
(a) $\dfrac{d}{d\lambda}\left(\exp(\lambda B)A\exp(-\lambda B)\right)$,
(b) $\dfrac{d}{d\lambda}\left(\exp(\lambda A)\exp(\lambda B)\right)$,
où ni A ni B ne dépendent de λ.

2. On définit $\dfrac{\partial F(A,B,C,\ldots)}{\partial A} = \displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\frac{F(A+\epsilon 1, B, C, \ldots) - F(A,B,C,\ldots)}{\epsilon}$.
Montrer que
(a) $\dfrac{dA^n}{dA} = nA^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq -1)$.
(b) $\dfrac{d\exp(A)}{dA} = \exp(A)$.

3. Montrer que pour trois opérateurs A, B, C quelconques
$$[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B,$$
$$[A, BC] = B[A,C] + [A,B]C.$$

4. Soient A et B deux opérateurs qui vérifient la relation $[A,B] = i1$ et soit $F(A,B)$ une fonction qui est définie par la série
$$F(A,B) = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{nm}A^nB^m,$$
où $f_{nm} \in \mathbb{C}$ sont des constantes.
(a) Montrer par récurrence que
$$[A, B^n] = inB^{n-1}, \qquad [B, A^n] = -inA^{n-1}.$$
(b) Montrer que
$$[A, F(A,B)] = i\frac{\partial F(A,B)}{\partial B}, \quad [B, F(A,B)] = -i\frac{\partial F(A,B)}{\partial A}.$$

1. On donne les opérateurs d'échelle de l'oscillateur harmonique,

$$a = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\omega_0}}p,$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}x - \frac{i}{\sqrt{2m\omega_0}}p.$$

   (a) Donner la représentation matricielle de a et de $a^\dagger$ dans la base des états propres $\{|u_n\rangle\}$ de l'hamiltonien.

   (b) La même question pour les bases $\{|x\rangle\}$ et $\{|p\rangle\}$.

   (c) Résoudre les équations du mouvement pour les opérateurs a et $a^\dagger$ dans l'image de Heisenberg ($a_H(t)$ et $a^\dagger_H(t)$).

2. Calculer pour l'oscillateur harmonique en une dimension les valeurs moyennes suivantes pour les états propres $\{|u_n\rangle\}$ de l'opérateur hamiltonien :

   (a) $\langle x\rangle$ et $\langle p\rangle$ (Expliquer le résultat).

   (b) $\langle x^2\rangle$ et $\langle p^2\rangle$.

   (c) $\Delta x \Delta p$, où $\Delta x = \sqrt{\langle [x - \langle x\rangle]^2\rangle}$ et $\Delta p = \sqrt{\langle [p - \langle p\rangle]^2\rangle}$.

3. On considère un oscillateur harmonique en une dimension qui porte une charge Q et qui est exposé à un champ électrique E_{el} constant en direction de sa coordonnée de déplacement, x. (On suppose que Q est choisie tel que l'énergie baisse si x augmente.)

   (a) Quelle est la forme de l'opérateur hamiltonien pour ce problème ?

   (b) Donner les niveaux d'énergie de cet oscillateur et les fonctions d'onde propres $u_n(x)$ associées. Conseil : Utiliser la méthode du complément quadratique pour écrire l'opérateur hamiltonien dans une forme convenable pour cet exercice.

   (c) Comment faut-il choisir E_{el} pour que l'énergie de l'état fondamental soit nulle ?

1. Les relations suivantes sont à vérifier en utilisant uniquement l'algèbre des commutateurs (voir exercice 3 de la feuille de TD 4)

   (a) Montrer que
   $$[\vec{L}, V] = -i\hbar \vec{r} \wedge \nabla V(\vec{r}),$$
   où $\vec{L} = L_x\vec{e}_x + L_y\vec{e}_y + L_z\vec{e}_z$ et $\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$.

   (b) Avec les relations prouvées ci-dessus, montrer que le moment cinétique est une quantité conservée, si $V(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|)$, i.e.
   $$[H, L_k] = 0, \quad k = x, y, z, \quad \text{si } V(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|).$$
   On suppose que l'opérateur de Hamilton a la forme
   $$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}).$$

   (c) Montrer que
   $$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \quad \text{cycl.}$$
   $$[L_k, \vec{L}^2] = 0.$$

   (d) En introduisant
   $$L_\pm = L_x \pm iL_y,$$
   montrer que
   $$\vec{L}^2 = L_+L_- + L_z^2 - \hbar L_z = L_-L_+ + L_z^2 + \hbar L_z,$$
   $$[L_+, L_z] = -\hbar L_+,$$
   $$[L_-, L_z] = \hbar L_-,$$
   $$[L_\pm, \vec{L}^2] = 0.$$

2. Montrer explicitement que
   $$\langle \mathbf{p}|[T, L_k]|\mathbf{p}'\rangle = 0,$$
   où $T = \vec{p}^2/(2m)$.