



Exercices Mécanique Quantique - Master Physique

Matrices, rotations

1. Le moment magnétique d'un électron est $\mu_e = g\mu_B$, où $\mu_B = \hbar e / (2m_e)$ est le magnéton de Bohr et $g \approx 2$. Ici m_e dénote la charge de l'électron et e sa charge. Comparer cette valeur avec celle d'une sphère qui porte la charge e et dont le moment cinétique intrinsèque autour de l'axe z est $\hbar/2$. On suppose que la densité de charge ρ dans la sphère est la densité de masse sont constantes. Utiliser que le vecteur du moment magnétique et le moment d'inertie d'une sphère de masse m et de rayon a sont $\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{r} \wedge (\rho \vec{v})$ et $I_s = 2ma^2/5$, respectivement.
2. Où dans le plan complexe sont situées les valeurs propres d'une matrice unitaire ?
3. Les matrices de Pauli sont données par

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer qu'elles vérifient les relations

i. $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$ (cycl.)

ii. $\text{tr}\{\sigma_k \sigma_j\} = 2\delta_{kj}$

On note que $\text{tr}\{\mathbf{A}\} = \sum_{i=1}^n A_{ii}$ si \mathbf{A} est une matrice de dimensions $n \times n$ et que $\text{tr}\{\mathbf{AB}\} = \text{tr}\{\mathbf{BA}\}$ (\mathbf{B} a les mêmes dimensions que \mathbf{A}).

- (b) Calculer leurs valeurs et vecteurs propres

4. On donne la matrice

$$\mathbf{U}(\mathbf{n}, \phi) = \cos(\phi/2)\mathbf{1} + i \sin(\phi/2)(n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z)$$

où $\sigma_{x,y,z}$ sont les matrices de Pauli et $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ contient les composantes d'un vecteur d'unité \vec{n} par rapport à la base d'un espace euclidien, tel que $\mathbf{n}^T \mathbf{n} = 1$.

- (a) Définissant $\mathbf{N} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z$, montrer que

i. $\mathbf{N}^2 = \mathbf{1}$,

ii. \mathbf{N} est une matrice hermitienne.

iii. Montrer que \mathbf{U} est unitaire et calculer $\det(\mathbf{U})$.

- (b) On donne la représentation d'un vecteur dans l'espace des spineurs par

$$\xi = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z.$$

Calculer $\xi' = \mathbf{U}^\dagger(\vec{n}, \epsilon)\xi\mathbf{U}(\vec{n}, \epsilon)$, pour $|\epsilon| \ll 1$.

5. On donne la matrice

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que $\mathbf{K}^2 = \mathbf{1}$.

(b) Montrer que $\mathbf{A}(\phi) = \exp(\phi\mathbf{K}) = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) \end{pmatrix}$

(c) Soit la "norme" $\|\mathbf{r}\|$ de $\mathbf{r} \equiv (x, y)^T$ ($x, y \in \mathbb{R}$) définie par $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{|x^2 - y^2|}$. Montrer que $\|\tilde{\mathbf{r}}\| = \|\mathbf{r}\|$, où $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{A}(\phi)\mathbf{r}$.



Exercices Mécanique Quantique - Master Physique

Spin

1. On donne le champ magnétique

$$\vec{B} = B \sin \varphi \vec{e}_x + B \cos \varphi \vec{e}_z,$$

où $\varphi \in [0, 2\pi)$.

- Donner la représentation matricielle \mathbf{H} de l'hamiltonien en utilisant la forme des matrices de Pauli introduites dans le cours.
 - Calculer les énergies possibles du spin.
 - Calculer les spineurs propres de \mathbf{H} . Conseil : Construire \vec{B} par rotation à partir de $\vec{B}_0 = B\vec{e}_z$ et utiliser la formule de rotation correspondante pour les spineurs.
2. On donne un champ magnétique constant, $\vec{B} = B\vec{e}_z$, et on considère un "spin 1/2" dont l'état pour $t = 0$ est décrit par le spineur

$$\chi(0) = \cos \phi \chi_z^+ + \sin \phi \chi_z^- = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix},$$

où $\phi \in \mathbb{R}$ et χ_z^+ et χ_z^- décrivent, respectivement, une polarisation parallèle et antiparallèle à l'axe z dans un repère cartésien.

- Calculer $\chi(t)$ pour le champ magnétique donné.
 - Calculer les valeurs moyennes $\langle s_i(t) \rangle$ pour les composantes $i = x, y, z$ du spin. Quelle trajectoire est décrite par la pointe du vecteur $\langle \vec{s}(t) \rangle$?
3. On donne les matrices

$$\mathbf{S}_x = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_z = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

qui représentent un spin d'amplitude \hbar .

- Construire la matrice \mathbf{H} qui représente l'hamiltonien pour un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{n}$, où $\vec{n} = n_x\vec{e}_x + n_y\vec{e}_y + n_z\vec{e}_z$ est un vecteur d'unité dans une direction quelconque. Montrer que \mathbf{H} est une matrice hermitienne.
- Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres (normalisés) correspondants de la matrice \mathbf{H} si $\vec{B} = B\vec{e}_z$.
 - Soient $\lambda_+, \lambda_0, \lambda_-$ les valeurs propres, où $\lambda_+ < \lambda_0 < \lambda_-$, et soient χ_+, χ_0, χ_- les spineurs propres associés. Quelle est la signification physique de ces valeurs propres et à quelle orientation du spin par rapport au champ magnétique correspondent-elles?
 - Calculer l'énergie moyenne du spin pour l'état représenté par $\chi = \alpha_+\chi_+ + \alpha_0\chi_0 + \alpha_-\chi_-$, où $|\alpha_+|^2 + |\alpha_0|^2 + |\alpha_-|^2 = 1$.



Exercices Mécanique Quantique - Master Physique

Espace vectoriel unitaire (I)

1. Soient $|u\rangle$ et $|v\rangle$ deux vecteurs complexes normalisés, $\langle u|u\rangle = 1$, $\langle v|v\rangle = 1$, et $|v\rangle = c|u\rangle$ ($c \in \mathbb{C}$). Quelle est la forme la plus générale pour c si $|u\rangle$ et $|v\rangle$ sont des éléments d'un espace vectoriel réel et complexe, respectivement ?
2. Soit $|u\rangle$ un vecteur d'unité dans un espace vectoriel unitaire à deux dimensions. Combien de vecteurs normalisés et orthogonaux à $|u\rangle$ y a-t-il ? La même question si l'espace vectoriel est réel. (Utiliser une base orthonormée pour exprimer les vecteurs dans cet espace vectoriel.)
3. Soit $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ une base orthonormée d'un espace vectoriel unitaire à deux dimensions ("base A"). On donne une deuxième base ("base B") dans cet espace par

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|a_1\rangle + i|a_2\rangle\}, \quad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|a_1\rangle - i|a_2\rangle\}.$$

- (a) Montrer que la base B est orthonormée.
- (b) Donner la représentation matricielle de $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ et de $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$ dans la base A .
- (c) Donner la représentation matricielle de $\langle b_1|$ et $\langle b_2|$ dans la base A .
- (d) Donner la représentation matricielle de $|a_1\rangle$ et $|a_2\rangle$ dans la base B .
- (e) Construire l'opérateur unitaire U qui est défini par $|b_j\rangle = U|a_j\rangle$ ($j = 1, 2$) et donner sa représentation matricielle dans la base A .
- (f) Soit $|\chi\rangle$ un vecteur dont la représentation matricielle dans la base A est donnée par

$$\chi^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la représentation dans la base B ?

- (g) Soit T un opérateur qui a la représentation matricielle dans la base A est

$$\mathbf{T}^{(A)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la représentation dans la base B ?

4. Soit $T = |u\rangle\langle u|$ un opérateur dans un espace unitaire à n dimensions.
 - (a) Est-ce que T est hermitien ?
 - (b) Quelle propriété doit posséder le vecteur $|u\rangle$ afin que T soit un projecteur ? (Rappel : Un projecteur P a les propriétés $P^2 = P$ et $P^\dagger = P$.)
 - (c) Montrer que les valeurs propres de P sont ou 0 ou 1.



Exercices Mécanique Quantique - Master Physique

Espace vectoriel unitaire (II)

1. La dérivée d'un opérateur A qui dépend d'un paramètre λ est donnée par

$$\frac{dA}{d\lambda} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A(\lambda + \epsilon) - A(\lambda)}{\epsilon}.$$

Montrer que

- (a) $\frac{d}{d\lambda}(AB) = \frac{dA}{d\lambda}B + A\frac{dB}{d\lambda}$.
- (b) $\frac{d}{d\lambda}A^{-1} = -A^{-1}\frac{dA}{d\lambda}A^{-1}$.
- (c) $\frac{d}{d\lambda}\exp(\lambda C) = C\exp(\lambda C) = \exp(\lambda C)C$, si C ne dépend pas de λ .
- (d) $\frac{d}{d\lambda}A^n = \sum_{l=1}^n A^{l-1}\frac{dA}{d\lambda}A^{n-l}$ ($n \geq 1$).

Avec ces résultats calculer

- (a) $\frac{d}{d\lambda}(\exp(\lambda B)A\exp(-\lambda B))$,
- (b) $\frac{d}{d\lambda}(\exp(\lambda A)\exp(\lambda B))$,

où ni A ni B ne dépendent de λ .

2. On définit $\frac{\partial F(A, B, C, \dots)}{\partial A} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(A + \epsilon 1, B, C, \dots) - F(A, B, C, \dots)}{\epsilon}$.

Montrer que

- (a) $\frac{dA^n}{dA} = nA^{n-1}$ ($n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$).
- (b) $\frac{d\exp(A)}{dA} = \exp(A)$.

3. Montrer que pour trois opérateurs A, B, C quelconques

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B,$$

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C.$$

4. Soient A et B deux opérateurs qui vérifient la relation $[A, B] = i1$ et soit $F(A, B)$ une fonction qui est définie par la série

$$F(A, B) = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{nm}A^n B^m,$$

où $f_{nm} \in \mathbb{C}$ sont des constantes.

- (a) Montrer par récurrence que

$$[A, B^n] = inB^{n-1}, \quad [B, A^n] = -inA^{n-1}.$$

- (b) Montrer que

$$[A, F(A, B)] = i\frac{\partial F(A, B)}{\partial B}, \quad [B, F(A, B)] = -i\frac{\partial F(A, B)}{\partial A}.$$



Exercices Mécanique Quantique - Master Physique

Oscillateur harmonique

1. On donne les opérateurs d'échelle de l'oscillateur harmonique,

$$a = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\omega_0}}p,$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}x - \frac{i}{\sqrt{2m\omega_0}}p.$$

- Donner la représentation matricielle de a et de a^\dagger dans la base des états propres $\{|u_n\rangle\}$ de l'hamiltonien.
 - La même question pour les bases $\{|x\rangle\}$ et $\{|p\rangle\}$.
 - Résoudre les équations du mouvement pour les opérateurs a et a^\dagger dans l'image de Heisenberg ($a_H(t)$ et $a_H^\dagger(t)$).
2. Calculer pour l'oscillateur harmonique en une dimension les valeurs moyennes suivantes pour les états propres $\{|u_n\rangle\}$ de l'opérateur hamiltonien :
- $\langle x \rangle$ et $\langle p \rangle$ (Expliquer le résultat).
 - $\langle x^2 \rangle$ et $\langle p^2 \rangle$.
 - $\Delta x \Delta p$, où $\Delta x = \sqrt{\langle [x - \langle x \rangle]^2 \rangle}$ et $\Delta p = \sqrt{\langle [p - \langle p \rangle]^2 \rangle}$.
3. On considère un oscillateur harmonique en une dimension qui porte une charge Q et qui est exposé à un champ électrique E_{el} constant en direction de sa coordonnée de déplacement, x . (On suppose que Q est choisie tel que l'énergie baisse si x augmente.)
- Quelle est la forme de l'opérateur hamiltonien pour ce problème ?
 - Donner les niveaux d'énergie de cet oscillateur et les fonctions d'onde propres $u_n(x)$ associées. Conseil : Utiliser la méthode du complément quadratique pour écrire l'opérateur hamiltonien dans une forme convenable pour cet exercice.
 - Comment faut-il choisir E_{el} pour que l'énergie de l'état fondamental soit nulle ?



Exercices Mécanique Quantique - Master Physique

Moment cinétique

1. Les relations suivantes sont à vérifier en utilisant uniquement l'algèbre des commutateurs (voir exercice 3 de la feuille de TD 4)

(a) Montrer que

$$[\vec{L}, V] = -i\hbar\vec{r} \wedge \nabla V(\vec{r}),$$

$$\text{où } \vec{L} = L_x\vec{e}_x + L_y\vec{e}_y + L_z\vec{e}_z \text{ et } \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

(b) Avec les relations prouvées ci-dessus, montrer que le moment cinétique est une quantité conservée, si $V(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|)$, i.e.

$$[H, L_k] = 0, \quad k = x, y, z, \quad \text{si } V(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|).$$

On suppose que l'opérateur de Hamilton a la forme

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}).$$

(c) Montrer que

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \quad \text{cycl.}$$

$$[L_k, \vec{L}^2] = 0.$$

(d) En introduisant

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y,$$

montrer que

$$\vec{L}^2 = L_+L_- + L_z^2 - \hbar L_z = L_-L_+ + L_z^2 + \hbar L_z,$$

$$[L_+, L_z] = -\hbar L_+,$$

$$[L_-, L_z] = \hbar L_-,$$

$$[L_{\pm}, \vec{L}^2] = 0.$$

2. Montrer explicitement que

$$\langle \mathbf{p} | [T, L_k] | \mathbf{p}' \rangle = 0,$$

$$\text{où } T = \vec{p}^2 / (2m).$$