1. On calcule ici d'abord le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ d'une sphère uniformément chargée, portant la charge de l'électron, qui tourne avec une vitesse ω autour de l'axe z, ainsi que le moment cinétique correspondant $\mathbf{S}$. Posant $|\mathbf{S}| = \hbar/2 = \theta_{zz}\omega$, on obtient une vitesse angulaire, ω, qui est injectée dans la formule pour $\boldsymbol{\mu}$. Le rapport $|\boldsymbol{\mu}|/|\mathbf{S}|$ est alors la constante gyromagnétique cherchée.

   (a) On calcule d'abord le moment magnétique. Définissant la charge totale comme e et le rayon de la sphère comme a, la densité de charge est
   $$\rho = \frac{e}{V}, \quad V = \frac{4\pi a^3}{3},$$
   et le moment magnétique est obtenue par l'intégrale de volume
   $$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\int d^3r\, \rho(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}).$$
   En coordonnées sphériques on écrit
   $$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi\, \rho(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}),$$
   où $\mathbf{r}$ et ω sont donnés par
   $$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}.$$
   Le résultat est
   $$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5}a^2 e\omega \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   (b) De la mème manière on calcule le spin, i.e. le moment cinétique d'une sphère de mass M et rayon a, avec une distribution de masse uniforme de
   $$\rho_m = \frac{m_e}{V}, \quad V = \frac{4\pi a^3}{3},$$
   où m_e est le masse de l'électron. Ceci donne
   $$\mathbf{S} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi\, \rho_m(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{5}a^2 m\omega \end{pmatrix}.$$

   (c) La composante z du spin donne le moment d'inertie,
   $$S_z = \theta_{zz}\omega \Longrightarrow \theta_{zz} = \frac{2}{5}a^2 m. \tag{2}$$

   (d) Ceci donne la vitesse angulaire
   $$\omega_e = \frac{\hbar}{2\theta_{zz}} = \frac{5\hbar}{4a^2 m_e}. \tag{3}$$

(e) L'insertion de ω dans la formule pour $\boldsymbol{\mu}$ donne alors

$$\boxed{\mu_{e,\text{model}} = \frac{1}{5}a^2 e\,\omega_e = \frac{\hbar e}{4m_e} = \frac{1}{2}\mu_e} \tag{4}$$

où μ_e est le magnéton de Bohr,

$$\mu_e \equiv \frac{\hbar e}{2m_e}, \tag{5}$$

qui est le "vrai" moment magnétique de l'électron. Sa valeur est $\mu_e \approx 9.2740 \times 10^{-24}\,\text{J/T}$.

2. On part de $\mathbf{U}\boldsymbol{\chi} = \lambda\boldsymbol{\chi}$, où $\boldsymbol{\chi}$ est un vecteur propre normalisé à 1, $\|\boldsymbol{\chi}\|^2 = \boldsymbol{\chi}^\dagger\boldsymbol{\chi} = 1$. Par conséquent $\|\mathbf{U}\boldsymbol{\chi}\|^2 = \boldsymbol{\chi}^\dagger\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\boldsymbol{\chi} = |\lambda|^2\boldsymbol{\chi}^\dagger\boldsymbol{\chi}$. Comme une matrice unitaire vérifie $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{1}$, il suit que $|\lambda|^2 = 1$. Par conséquent

$$\lambda = \exp(i\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

Les valeurs propres d'une matrice unitaire sont donc situées sur le cercle trigonométrique.

3. (a) Les matrices de Pauli ont la forme

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

i. Avec ceci on trouve d'abord

$$\boldsymbol{\sigma}_x\boldsymbol{\sigma}_y = -\boldsymbol{\sigma}_y\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\boldsymbol{\sigma}_z \Rightarrow [\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y] = 2i\boldsymbol{\sigma}_z,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z\boldsymbol{\sigma}_x = -\boldsymbol{\sigma}_x\boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\boldsymbol{\sigma}_y \Rightarrow [\boldsymbol{\sigma}_z, \boldsymbol{\sigma}_x] = 2i\boldsymbol{\sigma}_y,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_y\boldsymbol{\sigma}_z = -\boldsymbol{\sigma}_z\boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\boldsymbol{\sigma}_x \quad \Rightarrow [\boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z] = 2i\boldsymbol{\sigma}_x,$$

ce qui montre que $[\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y] = 2i\boldsymbol{\sigma}_z$ (cycl.).

ii. Avec $\boldsymbol{\sigma}_k^2 = \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est la matrice d'unité en deux dimensions, on voit que $\text{tr}\{\boldsymbol{\sigma}_k^2\} = 2$. Pour $j \neq k$ on a $\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_k = -\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\sigma}_j$ et $\text{tr}\{\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_k\} = -\text{tr}\{\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\sigma}_j\}$. Comme $\text{tr}\{\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\sigma}_j\} = \text{tr}\{\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_k\}$, il suit que $\text{tr}\{\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_k\} = -\text{tr}\{\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_k\}$. Par conséquent $\text{tr}\{\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_k\} = 0$ si $j \neq k$. Ceci prouve que $\text{tr}\{\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_k\} = \delta_{jk}$.

(b) Pour toutes les matrices de Pauli les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$. Les vecteurs propres associés sont, dans l'ordre respectif,

i. Pour $\boldsymbol{\sigma}_x$:

$$\boldsymbol{\chi}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\chi}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

ii. Pour $\boldsymbol{\sigma}_y$:

$$\boldsymbol{\chi}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\chi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

iii. Pour $\boldsymbol{\sigma}_z$:

$$\boldsymbol{\chi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\chi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On note que les vecteurs propres sont déterminés à une constante multiplicative près qui vérifie la condition $|c| = 1$.

4. (a) i. Avec la définition des matrices de Pauli la matrice $\mathbf{N}$ prend la forme

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix}$$

Utilisant que $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ on trouve que $\mathbf{N}^2 = \mathbf{1}$.

ii. La forme de $\mathbf{N}$ montre directement que

$$\mathbf{N}^\dagger = (\mathbf{N}^*)^T = (\mathbf{N}^T)^* = \mathbf{N}.$$

(b) Calculons $\mathbf{U}^\dagger(\mathbf{n}, \epsilon)$:

$$\mathbf{U}^\dagger(\mathbf{n}, \epsilon) = \Big(\cos(\epsilon/2)\mathbf{1} + i\sin(\epsilon/2)\mathbf{N}\Big)^\dagger = \cos(\epsilon/2)\mathbf{1}^\dagger - i\sin(\epsilon/2)\mathbf{N}^\dagger$$
$$= \cos(\epsilon/2)\mathbf{1} - i\sin(\epsilon/2)\mathbf{N} = \mathbf{U}(\mathbf{n}, -\epsilon).$$

Comme

$$\mathbf{U}(\mathbf{n}, -\epsilon)\mathbf{U}(\mathbf{n}, \epsilon) = \Big(\cos(\epsilon/2)\mathbf{1} - i\sin(\epsilon/2)\mathbf{N}\Big)\Big(\cos(\epsilon/2)\mathbf{1} + i\sin(\epsilon/2)\mathbf{N}\Big)$$
$$= \cos^2(\epsilon/2)\mathbf{1} + \cos(\epsilon/2)^2(\epsilon/2)\mathbf{N}^2 = \cos^2(\epsilon/2)\mathbf{1} + \sin^2(\epsilon/2)\mathbf{1} = \mathbf{1},$$

on a vérifié que $\mathbf{U}^\dagger(\mathbf{n}, \epsilon) = \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{n}, \epsilon)$.
Afin de calculer la déterminant de $\mathbf{U}(\mathbf{n}, \epsilon)$ on utilise la forme explicite

$$\mathbf{U}(\mathbf{n}, \epsilon) = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon/2) + in_z \sin(\epsilon/2) & (in_x + n_y)\sin(\epsilon/2) \\ (in_x - n_y)\sin(\epsilon/2) & \cos(\epsilon/2) - in_z\sin(\epsilon/2) \end{pmatrix}.$$

Avec ceci on trouve

$$\det(\mathbf{U}(\mathbf{n}, \epsilon)) = 1.$$

(c) Si $|\epsilon| \ll 1$ on peut approcher

$$\mathbf{U}(\mathbf{n}, \epsilon) \approx \mathbf{1} + i\frac{\epsilon}{2}\mathbf{N}.$$

Avec ceci et les formes explicites $\mathbf{N} = \sum_i n_i \boldsymbol{\sigma}_i$ et $\boldsymbol{\xi} = \sum_j \xi_j \boldsymbol{\sigma}_j$, on obtient

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{U}^\dagger(\mathbf{n},\epsilon)\boldsymbol{\xi}\mathbf{U}(\mathbf{n},\epsilon) &\approx \left(\mathbf{1} - i\frac{\epsilon}{2}\mathbf{N}\right)\boldsymbol{\xi}\left(\mathbf{1} + i\frac{\epsilon}{2}\mathbf{N}\right) \\
&= \boldsymbol{\xi} - i\frac{\epsilon}{2}[\mathbf{N},\boldsymbol{\xi}] + O(\epsilon^2) = \boldsymbol{\xi} - i\frac{\epsilon}{2}\sum_{i,j} n_i \xi_j [\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_j] + O(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

Utilisant $[\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y] = 2i\boldsymbol{\sigma}_z$ (cycl.) on trouve

$$\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi} + \epsilon\Big\{(n_y z - n_z y)\boldsymbol{\sigma}_x + (n_z x - n_x z)\boldsymbol{\sigma}_y + (n_x y - n_y x)\boldsymbol{\sigma}_z\Big\} + O(\epsilon^2).$$

Les composantes de $\boldsymbol{\xi}'$ correspondent donc aux composantes d'un vecteur $\vec{x}' \approx \vec{x} + \epsilon\,\vec{n} \wedge \vec{x}$.

5. (a) Par multiplication matricielle il suit directement que

$$\mathbf{K}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{1}.$$

(b) On développe $\mathbf{A}$ en une série de Taylor, utilisant que $\mathbf{K}^2 = 1$:

$$\begin{aligned}
\exp(\phi K) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!}\mathbf{K}^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k}}{(2k)!}\mathbf{K}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathbf{K}^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k}}{(2k)!}(\mathbf{1})^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!}(\mathbf{1})^k\mathbf{K} \\
&= \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\phi^{2k}\right\}\mathbf{1} + \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\phi^{2k+1}\right\}\mathbf{K} \\
&= \cosh\phi\,\mathbf{1} + \sinh\phi\,\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) On voit que

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 &= (x\cosh\phi + y\sinh\phi)^2 - (x\sinh\phi + y\cosh\phi)^2 \\
&= x^2(\cosh\phi^2 - \sinh\phi^2) - y^2(\cosh\phi^2 - \sinh\phi^2) = x^2 - y^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\|\tilde{\mathbf{r}}\| = \|\mathbf{r}\|$.

1. (a) La forme générale de la représentation matricielle de l'hamiltonien est

$$\mathbf{H} = -\mu \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{\sigma}_k B_k,$$

où $\mu = \gamma\hbar/2$ et les $\boldsymbol{\sigma}_i$ sont les matrices de Pauli,

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Avec $\vec{B} = B \sin\varphi\, \vec{e}_x + B\cos\varphi\, \vec{e}_z$ on obtient

$$\mathbf{H} = -\mu B \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

(b) Les valeurs propres de $\mathbf{H}$ sont les énergies possibles,

$$E_\pm = \mp \mu B,$$

où les indices "$+$" et "$-$" correspondent, respectivement, à la polarisation parallèle et antiparallèle au champ magnétique.

(c) On remarque que $\vec{B}$ est obtenu à partir de $\vec{B}_0$ en appliquant une rotation par φ autour de l'axe $\vec{e}_y$. Par conséquent $\mathbf{B} = \mathbf{D}(\mathbf{e}_y, \varphi)\mathbf{B}_0$, où $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B)^T$, et les spineurs propres de $\mathbf{H}$ sont obtenus par

$$\boldsymbol{\chi}_\pm = \mathbf{U}(\mathbf{e}_y, -\varphi)\boldsymbol{\chi}_\pm^{(0)},$$

avec

$$\mathbf{U}(\mathbf{e}_y, -\varphi) = \cos(\varphi/2)\mathbf{1} - i\sin(\varphi/2)\boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & -\sin(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix}.$$

Partant de

$$\mathbf{H}_0 = -\mu \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{\sigma}_k B_{0,k} = -\mu B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et les spineurs propres associés,

$$\boldsymbol{\chi}_+^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\chi}_-^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\boldsymbol{\chi}_+ = \mathbf{U}(\mathbf{e}_y, -\varphi)\boldsymbol{\chi}_+^{(0)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\chi}_- = \mathbf{U}(\mathbf{e}_y, -\varphi)\boldsymbol{\chi}_-^{(0)} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi/2) \\ \cos(\varphi/2) \end{pmatrix}.$$

2. (a) Dans le cours nous avons vu que l'évolution du spin dans le temps est donnée par

$$\boldsymbol{\chi}(t) = \exp\left(i\frac{\gamma t}{2}\sum_{k=1}^{3} B_k\boldsymbol{\sigma}_k\right)\boldsymbol{\chi}(0) = \mathbf{U}(\mathbf{n}, \omega_L t/2)\boldsymbol{\chi}(0),$$

où σ_k sont les matrices de Pauli, $\omega_L = \gamma|\vec{B}|$ est la fréquence (pulsation) de Larmor, et γ est le rapport gyromagnétique du spin. L'exponentielle matricielle $\mathbf{U}$ peut également exprimée comme (voir cours)

$$\mathbf{U}(\mathbf{n}, \omega_L t/2) = \cos(\omega_L t/2)\mathbf{1} + i\sin(\omega_L t/2)\left\{\sum_{k=1}^{3} n_k\boldsymbol{\sigma}_k\right\},$$

où $\mathbf{1}$ est la matrice d'unité 2×2 et n_k sont les composantes du vecteur d'unité en direction du champ magnétique, $\vec{n} = \vec{B}/|\vec{B}|$. Avec ceci obtient pour $\vec{B} = B\vec{e}_z$

$$\mathbf{U}(\mathbf{n}, \omega_L t/2) \equiv \mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}it\omega_L} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}it\omega_L} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\boldsymbol{\chi}(t) = \mathbf{U}(t)\boldsymbol{\chi}(0) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}it\omega_L}\cos(\phi) \\ e^{-\frac{it\omega_L}{2}}\sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

(b) Avec le résultat précédent

$$\begin{aligned}
\langle s_x(t)\rangle &= \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\chi}^\dagger(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}_x\cdot\boldsymbol{\chi}(t) = \frac{\hbar}{2}\sin(2\phi)\cos(\omega_L t) \\
\langle s_y(t)\rangle &= \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\chi}^\dagger(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}_y\cdot\boldsymbol{\chi}(t) = -\frac{\hbar}{2}\sin(2\phi)\sin(\omega_L t) \\
\langle s_z(t)\rangle &= \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\chi}^\dagger(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}_z\cdot\boldsymbol{\chi}(t) = \frac{\hbar}{2}\cos(2\phi)
\end{aligned}$$

On voit le vecteur $\langle\vec{s}(t)\rangle$ effectue un mouvement de précession – sa pointe décrit un mouvement circulaire, avec une composante $\langle s_z(t)\rangle$ constante.

3. (a) La matrice de l'hamiltonien est donnée par $\mathbf{H} = -\gamma B(n_x\mathbf{s}_x + n_y\mathbf{s}_y + n_z\mathbf{s}_z)$. La forme explicite est

$$\mathbf{H} = \hbar\gamma B\begin{pmatrix} 0 & in_z & -in_y \\ -in_z & 0 & in_x \\ in_y & -in_x & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que $(\mathbf{H}^T)^* = \mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}$. La matrice $\mathbf{H}$ est donc hermitienne.

(b) Pour le choix $\vec{B} = B\vec{e}_z$ on obtient

$$\mathbf{H} = \hbar\gamma B \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est $\det(\mathbf{H} - \lambda\mathbf{1}) = -\lambda^3 + \hbar^2\gamma^2 B^2 \lambda$ et les valeurs propres sont

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_+ = -\hbar\gamma B, \quad \lambda_- = \hbar\gamma B.$$

Les valeurs propres sont les énergies possibles du spin. L'énergie la plus basse, λ_+, correspond à l'orientation parallèle du spin et du champ magnétique, λ_- à l'orientation anti-parallèle et λ_0 à l'orientation orthogonale.
Les vecteurs (spineurs) propres associés sont

$$\boldsymbol{\chi}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\chi}_+ = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\chi}_- = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) On calcule

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha_- - \alpha_+) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_- + \alpha_+) \\ \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Avec ceci

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \boldsymbol{\chi}^\dagger \mathbf{H} \boldsymbol{\chi} = \hbar\gamma B(|\alpha_-|^2 - |\alpha_+|^2).$$

On peut aussi écrire

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \lambda_0|\alpha_0|^2 + \lambda_+|\alpha_+|^2 + \lambda_-|\alpha_-|^2.$$

1. Avec $|v\rangle = c|u\rangle$ ($c \in \mathbb{C}$) on obtient $\langle v|v\rangle = |c|^2\langle u|u\rangle$. Comme $\langle u|u\rangle = 1$ et $\langle v|v\rangle = 1$, il suit que $|c|^2 = 1$. La forme la plus générale pour c est
$$c = \exp(i\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi).$$
Dans un espace vectoriel réel c doit être réel et $c = \pm 1$.

2. Soit $\{|a_i\rangle\}$ ($i = 1, 2$) une base orthonormée de l'espace vectoriel unitaire en deux dimensions, tel que $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$, et soit $|u\rangle = u_1|a_1\rangle + u_2|a_2\rangle$ un vecteur normé, $\langle u|u\rangle = |u_1|^2 + |u_2|^2 = 1$. Pour un vecteur $|v\rangle = v_1|a_1\rangle + v_2|a_2\rangle$, avec $|v\rangle \perp |u\rangle$, on a les conditions
$$\begin{aligned}\langle u|v\rangle &= u_1^* v_1 + u_2^* v_2 = 0,\\ \langle v|v\rangle &= |v_1|^2 + |v_2|^2 = 1.\end{aligned}$$
Ces conditions sont vérifiées si
$$v_1 = u_2^* \exp(i\phi), \quad v_2 = -u_1^* \exp(i\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi).$$
Par conséquent
$$|v\rangle = u_2^* \exp(i\phi)|a_1\rangle - u_1^* \exp(i\phi)|a_2\rangle, \quad \phi \in [0, 2\pi).$$
Il y a donc un nombre infini de vecteurs $|v\rangle \perp |u\rangle$, car ϕ est arbitraire. Si l'espace vectoriel est réel, $\exp(i\phi)$ est réel si $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$. Il n'y a donc que deux solutions,
$$\begin{aligned}|v_1\rangle &= u_2|a_1\rangle - u_1|a_2\rangle\\ |v_2\rangle &= -u_2|a_1\rangle + u_1|a_2\rangle = -|v_1\rangle.\end{aligned}$$

3. (a) Par définition, la base $\{|a_i\rangle\}$ ($i = 1, 2$) est orthonormée, $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$. Avec ceci
$$\begin{aligned}\langle b_1|b_1\rangle &= \frac{1}{2}\langle a_1|a_1\rangle + \frac{i}{2}\langle a_1|a_2\rangle - \frac{i}{2}\langle a_2|a_1\rangle + \frac{1}{2}\langle a_2|a_2\rangle = 1,\\ \langle b_1|b_2\rangle &= \frac{1}{2}\langle a_1|a_1\rangle - \frac{i}{2}\langle a_1|a_2\rangle - \frac{i}{2}\langle a_2|a_1\rangle - \frac{1}{2}\langle a_2|a_2\rangle = 0,\\ \langle b_2|b_1\rangle &= \langle b_1|b_2\rangle^* = 0,\\ \langle b_2|b_2\rangle &= \frac{1}{2}\langle a_1|a_1\rangle - \frac{i}{2}\langle a_1|a_2\rangle + \frac{i}{2}\langle a_2|a_1\rangle + \frac{1}{2}\langle a_2|a_2\rangle = 1.\end{aligned}$$
La base "B" est donc orthormée, $\langle b_i|b_j\rangle = \delta_{ij}$.

(b) Pour la base "A"
$$|a_1\rangle \leftrightarrow \mathbf{a}_1^{(A)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |a_2\rangle \leftrightarrow \mathbf{a}_2^{(A)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Pour la base "B"
$$|b_1\rangle \leftrightarrow \mathbf{b}_1^{(A)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad |b_2\rangle \leftrightarrow \mathbf{b}_2^{(A)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\langle b_1|^\dagger \leftrightarrow \mathbf{b}_1^{(A)\,\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \langle b_2|^\dagger \leftrightarrow \mathbf{b}_2^{(A)\,\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(d) Partant de

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|a_2\rangle,$$
$$|b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|a_2\rangle.$$

on trouve $|b_1\rangle + |b_2\rangle = \sqrt{2}|a_1\rangle$ et $|b_1\rangle - |b_2\rangle = \sqrt{2}i|a_2\rangle$, d'où

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|b_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b_2\rangle \leftrightarrow \mathbf{a}_1^{(B)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$
$$|a_2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}|b_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|b_2\rangle \leftrightarrow \mathbf{a}_2^{(B)} = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(e) On part de $|b_j\rangle = \hat{U}|a_j\rangle$. Avec ceci

$$U_{ij}^{(A)} = \langle a_i|\hat{U}|a_j\rangle = \langle a_i|b_j\rangle.$$

Dans la base A l'opérateur $\hat{U}$ est représenté par la matrice unitaire

$$\mathbf{U}^{(A)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

L'opérateur $\hat{U}$ même peut être écrit dans la forme

$$\hat{U} = \sum_{k=1}^{2} |b_k\rangle\langle a_k|.$$

(f) Avec $\boldsymbol{\chi}^{(A)}$

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle.$$

Comme $|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|b_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b_2\rangle$ (voir dessus), il suit alors que

$$|\chi\rangle = \frac{1}{2}|b_1\rangle + \frac{1}{2}|b_2\rangle,$$

et par conséquent

$$\boldsymbol{\chi}^{(B)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

(g) Les éléments de $\hat{T}$ dans la base B sont

$$T_{ij}^{(B)} = \langle b_i|\hat{T}|b_j\rangle = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\langle b_i|a_k\rangle\langle a_k|\hat{T}|a_l\rangle\langle a_l|b_j\rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\langle b_i|a_k\rangle T_{kl}^{(A)}\langle a_l|b_j\rangle = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} U_{ki}^{(A)\,*} T_{kl}^{(A)} U_{lj}^{(A)}.$$

Ceci montre que

$$\mathbf{T}^{(B)} = \mathbf{U}^{(A)\,\dagger}\mathbf{T}^{(A)}\mathbf{U}^{(A)},$$

explicitement

$$\mathbf{T}^{(B)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (a) $\hat{T}^\dagger$ est donné par

$$\hat{T}^\dagger = \{\langle u|\}^\dagger\{|u\rangle\}^\dagger = |u\rangle\langle u| = \hat{T}.$$

L'opérateur $\hat{T}$ est donc hermitien.

(b) Pour que $\hat{T}$ soit un projecteur, il faut que

$$\hat{T}^{\,2} = |u\rangle\langle u|u\rangle\langle u| = \||u\rangle\|^2\hat{T} = \hat{T}.$$

$\hat{T}$ est un projecteur si $\||u\rangle\|^2 = 1$.

(c) Les valeurs et vecteurs propres d'un projecteur $\hat{P}$ sont définis par la relation $\hat{P}\,|\eta_j\rangle = \lambda_j|\eta_j\rangle$. Application de $\hat{P}$ par la gauche donne

$$\hat{P}^{\,2}\,|\eta_j\rangle = \lambda_j\hat{P}\,|\eta_j\rangle = \lambda_j^2|\eta_j\rangle.$$

D'autre part, $\hat{P}^{\,2} = \hat{P}$ et $\hat{P}^{\,2}\,|\eta_j\rangle = \hat{P}\,|\eta_j\rangle = \lambda_j|\eta_j\rangle$. Par conséquent

$$\lambda_j^2 = \lambda_j \Rightarrow \lambda_j = 0 \text{ ou } \lambda_j = 1.$$

1. (a) Par définition

$$\frac{d}{d\lambda}(\hat{A}\hat{B}) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\hat{A}(\lambda+\epsilon)\hat{B}(\lambda+\epsilon)-\hat{A}(\lambda)\hat{B}(\lambda)}{\epsilon}$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\hat{A}(\lambda+\epsilon)\hat{B}(\lambda+\epsilon)-\hat{A}(\lambda)\hat{B}(\lambda+\epsilon)+\hat{A}(\lambda)\hat{B}(\lambda+\epsilon)-\hat{A}(\lambda)\hat{B}(\lambda)}{\epsilon}$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Big(\hat{A}(\lambda+\epsilon)-\hat{A}(\lambda)\Big)\hat{B}(\lambda+\epsilon)+\hat{A}(\lambda)\Big(\hat{B}(\lambda+\epsilon)-\hat{B}(\lambda)\Big)}{\epsilon}$$
$$= \left\{\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\hat{A}(\lambda+\epsilon)-\hat{A}(\lambda)}{\epsilon}\right\}\hat{B}(\lambda)+\hat{A}(\lambda)\left\{\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\hat{B}(\lambda+\epsilon)-\hat{B}(\lambda)}{\epsilon}\right\} = \frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{B}+\hat{A}\frac{d\hat{B}}{d\lambda}.$$

(b) Ici on utilise la règle du produit, posant $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$,

$$\frac{d}{d\lambda}(\hat{A}\hat{A}^{-1}) = \hat{0} = \frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{-1}+\hat{A}\frac{d\hat{A}^{-1}}{d\lambda} \Rightarrow \frac{d\hat{A}^{-1}}{d\lambda} = -\hat{A}^{-1}\frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{-1}.$$

(c) On utilise la représentation $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$. Avec ceci

$$\frac{d}{d\lambda}\exp(\lambda\hat{C}) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\exp([\lambda+\epsilon]\hat{C})-\exp(\lambda\hat{C})}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\exp(\epsilon\hat{C})-\hat{1}}{\epsilon}\exp(\lambda\hat{C})$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\{\hat{1}+\epsilon\hat{C}+O(\epsilon^2)\}-\hat{1}}{\epsilon}\exp(\lambda\hat{C}) = \hat{C}\exp(\lambda\hat{C}) = \exp(\lambda\hat{C})\hat{C}.$$

(d) On utilise la règle du produit d'une manière répétée. La première étape est $\hat{A}^n = \hat{A}\hat{A}^{n-1}$. Avec ceci

$$\frac{d}{d\lambda}\hat{A}^n = \frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{n-1}+\hat{A}\frac{d\hat{A}^{n-1}}{d\lambda}$$
$$= \frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{n-1}+\hat{A}\left\{\frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{n-2}+\hat{A}\frac{d\hat{A}^{n-2}}{d\lambda}\right\} = \frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{n-1}+\hat{A}\frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{n-2}+\hat{A}^2\frac{d\hat{A}^{n-2}}{d\lambda}$$
$$= \frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{n-1}+\hat{A}\frac{d\hat{A}^{n-2}}{d\lambda}+\hat{A}^2\frac{d\hat{A}^{n-3}}{d\lambda}+\ldots+\hat{A}^{n-1}\frac{d\hat{A}}{d\lambda} = \sum_{l=1}^{n}\hat{A}^{l-1}\frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{n-l}.$$

Utilisant ces résultats on montre les relations suivantes.

(a)

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\exp(\lambda\hat{B})\hat{A}\exp(-\lambda\hat{B})\right\} = \exp(\lambda\hat{B})\hat{B}\hat{A}\exp(-\lambda\hat{B})-\exp(\lambda\hat{B})\hat{A}\hat{B}\exp(-\lambda\hat{B})$$
$$= \exp(\lambda\hat{B})(\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B})\exp(-\lambda\hat{B}) = \exp(\lambda\hat{B})[\hat{B},\hat{A}]\exp(-\lambda\hat{B}).$$

(b)

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\exp(\lambda\hat{A})\exp(\lambda\hat{B})\right\} = \exp(\lambda\hat{A})\hat{A}\exp(\lambda\hat{B})+\exp(\lambda\hat{A})\hat{B}\exp(\lambda\hat{B})$$
$$= \exp(\lambda\hat{A})(\hat{A}+\hat{B})\exp(\lambda\hat{B}).$$

2. (a) On utilise la définition

$$\frac{d\hat{A}^n}{d\hat{A}} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(\hat{A}+\epsilon\hat{1})^n - \hat{A}^n}{\epsilon}$$

et on sait que

$$(\hat{A}+\epsilon\hat{1})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\epsilon\hat{1})^k \hat{A}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \epsilon^k \hat{A}^{n-k}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{A}^n}{d\hat{A}} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(\hat{A}+\epsilon\hat{1})^n - \hat{A}^n}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\{\hat{A}^n + n\epsilon\hat{A}^{n-1} + O(\epsilon^2)\} - \hat{A}^n}{\epsilon} = n\hat{A}^{n-1}.\end{aligned}$$

(b) Par définition

$$\begin{aligned}\frac{d\exp(\hat{A})}{d\hat{A}} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\exp(\hat{A}+\epsilon\hat{1}) - \exp(\hat{A})}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\exp(\epsilon\hat{1}) - \hat{1}}{\epsilon} \exp(\hat{A}) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\{\hat{1} + \epsilon\hat{1} + O(\epsilon^2)\} - \hat{1}}{\epsilon} \exp(\hat{A}) = \exp(\hat{A}).\end{aligned}$$

3. Le commutateur $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}]$ s'écrit

$$\begin{aligned}[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} \\ &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}.\end{aligned}$$

Afin de prouver la deuxième relation on considère

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = -[\hat{B}\hat{C}, \hat{A}] = -\hat{B}[\hat{C}, \hat{A}] - [\hat{B}, \hat{A}]\hat{C} = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}.$$

4. (a) Pour $n = 1$ on obtient $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{1}$ et $[\hat{B}, \hat{A}] = -i\hat{1}$, et ces relations sont par définition vérifiés.
On suppose maintenant que la relation $[\hat{A}, \hat{B}^n] = in\hat{B}^{n-1}$ est valide pour $n = k$ et on montre qu'elle reste valide pour $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}[\hat{A}, \hat{B}^{k+1}] &= [\hat{A}, \hat{B}\hat{B}^k] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}^k] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^k \\ &= \hat{B}(ik\hat{B}^{k-1}) + i\hat{B}^k = i(k+1)\hat{B}^k.\end{aligned}$$

Comme la relation $[\hat{A}, \hat{B}^n] = in\hat{B}^{n-1}$ est valide pour $n = 1$, on a montré qu'elle est valide pour tout les $n \geq 1$.
La preuve de la relation $[\hat{B}, \hat{A}^n] = -in\hat{A}^{n-1}$ se déroule de la même façon. Ici on a

$$\begin{aligned}[\hat{B}, \hat{A}^{k+1}] &= [\hat{B}, \hat{A}\hat{A}^k] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{A}^k] + [\hat{B}, \hat{A}]\hat{A}^k \\ &= \hat{A}(-ik\hat{A}^{k-1}) - i\hat{A}^k = -i(k+1)\hat{A}^k.\end{aligned}$$

Comme la relation $[\hat{B}, \hat{A}^n] = -in\hat{A}^{n-1}$ est valide pour $n = 1$, elle est valide pour tous les $n \geq 1$.

(b) Le commutateur $[\hat{A}, \hat{F}(\hat{A}, \hat{B})]$ peut être développé comme suit :

$$[\hat{A}, \hat{F}(\hat{A}, \hat{B})] = \sum_{m,n=0}^{\infty} F_{mn}[\hat{A}, \hat{A}^m \hat{B}^n] =$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} F_{mn}\Big\{\hat{A}^m \underbrace{[\hat{A}, \hat{B}^n]}_{=in\hat{B}^{n-1}} + \underbrace{[\hat{A}, \hat{A}^m]}_{=\hat{0}} \hat{B}^n\Big\} = i \sum_{m,n=0}^{\infty} nF_{mn}\hat{A}^m \hat{B}^{n-1} = i\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{B}}.$$

Pour $[\hat{B}, \hat{F}(\hat{A}, \hat{B})]$ on obtient

$$[\hat{B}, \hat{F}(\hat{A}, \hat{B})] = \sum_{m,n=0}^{\infty} F_{mn}[\hat{B}, \hat{A}^m \hat{B}^n] =$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} F_{mn}\Big\{\hat{A}^m \underbrace{[\hat{B}, \hat{B}^n]}_{=\hat{0}} + \underbrace{[\hat{B}, \hat{A}^m]}_{=-im\hat{A}^{m-1}} \hat{B}^n\Big\} = -i \sum_{m,n=0}^{\infty} nF_{mn} m\hat{A}^{m-1} \hat{B}^n = -i\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{A}}.$$

1. (a) Dans le cours nous avons montré que

$$|u_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n\hbar}}\hat{a}|u_n\rangle,$$
$$|u_{n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(n+1)\hbar}}\hat{a}^\dagger|u_n\rangle.$$

Par conséquent

$$\langle u_m|\hat{a}|u_n\rangle = \sqrt{n\hbar}\,\delta_{m,n-1},$$
$$\langle u_m|\hat{a}^\dagger|u_n\rangle = \sqrt{(n+1)\hbar}\,\delta_{m,n+1},$$

où $m, n = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Dans la base $\{|x\rangle\}$ les représentations matricielles de $\hat{x}$ et $\hat{p}$ sont données par $\hat{x} \leftrightarrow x\delta(x-x')$ et $\hat{p} \leftrightarrow -i\hbar\partial_x\delta(x-x')$, respectivement. Avec ceci

$$\langle x|\hat{a}|x'\rangle = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}x\delta(x-x') + \frac{\hbar}{\sqrt{2m\omega_0}}\partial_x\delta(x-x'),$$
$$\langle x|\hat{a}^\dagger|x'\rangle = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}x\delta(x-x') - \frac{\hbar}{\sqrt{2m\omega_0}}\partial_x\delta(x-x')$$

Dans la base $\{|p\rangle\}$ les représentations matricielles de $\hat{x}$ et $\hat{p}$ sont, en revanche, $\hat{x} \leftrightarrow i\hbar\partial_p\delta(p-p')$ et $\hat{p} \leftrightarrow p\,\delta(p-p')$, respectivement. Avec ceci

$$\langle p|\hat{a}|p'\rangle = i\hbar\sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}\partial_p\delta(p-p') + \frac{i}{\sqrt{2m\omega_0}}p\,\delta(p-p'),$$
$$\langle p|\hat{a}^\dagger|p'\rangle = i\hbar\sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}\partial_p\delta(p-p') - \frac{i}{\sqrt{2m\omega_0}}p\,\delta(p-p').$$

(c) Pour un opérateur $\hat{A}$ quelconque on a

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{\partial\hat{A}_H(t)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}_H(t)].$$

Comme $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ ne dépendent pas explicitement du temps,

$$\frac{d\hat{a}_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}_H(t)] = \frac{i}{\hbar}\hat{U}^\dagger(t,t_0)[\hat{H},\hat{a}]\hat{U}(t,t_0),$$
$$\frac{d\hat{a}^\dagger_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}^\dagger_H(t)] = \frac{i}{\hbar}\hat{U}^\dagger(t,t_0)[\hat{H},\hat{a}^\dagger]\hat{U}(t,t_0).$$

On a vu que $[\hat{H},\hat{a}] = -\hbar\omega_0\hat{a}$ et $[\hat{H},\hat{a}^\dagger] = \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger$. Par conséquent

$$\frac{d\hat{a}_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\hat{U}^\dagger(t,t_0)(-\hbar\omega_0\hat{a})\hat{U}(t,t_0) = -i\omega_0\hat{a}_H(t),$$
$$\frac{d\hat{a}^\dagger_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\hat{U}^\dagger(t,t_0)(\hbar\omega_0\hat{a}^\dagger)\hat{U}(t,t_0) = i\omega_0\hat{a}^\dagger_H(t).$$

Les solutions des ces équations différentielles sont

$$\hat{a}_H(t) = \hat{a}_H(0)\exp(-i\omega_0 t),$$
$$\hat{a}_H^\dagger(t) = \hat{a}_H^\dagger(0)\exp(i\omega_0 t).$$

2. On écrit d'abord

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger),$$
$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger).$$

(a) Comme ici $\langle\hat{x}\rangle = \langle u_n|\hat{x}|u_n\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle = \langle u_n|\hat{p}|u_n\rangle$, il suit avec avec les résultats de l'exercice (1a) $\langle\hat{x}\rangle = 0$ et $\langle\hat{p}\rangle = 0$.

(b) On développe d'abord

$$\hat{x}^2 = \frac{1}{2m\omega_0}\left(\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + [\hat{a}^\dagger]^2\right) = \frac{1}{2m\omega_0}\left(\hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}^\dagger]^2\right)$$
$$= \frac{1}{2m\omega_0}\left(\hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\hat{1} + [\hat{a}^\dagger]^2\right).$$

Avec l'exercice (1a) $\hat{a}^2|u_n\rangle = n(n-1)\hbar|u_{n-2}\rangle$ et $[\hat{a}^\dagger]^2|u_n\rangle = (n+1)(n+2)\hbar|u_{n+2}\rangle$. Par conséquent $\langle u_n|\hat{a}^2|u_n\rangle = 0$ et $\langle u_n|[\hat{a}^\dagger]^2|u_n\rangle = 0$. Comme $\langle u_n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|u_n\rangle = n\hbar$ (voir cours), il suit que

$$\langle x^2\rangle = \langle u_n|\hat{x}^2|u_n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_0}(2n+1).$$

Pour $\hat{p}^2$ on trouve

$$\hat{p}^2 = -\frac{m\omega_0}{2}\left(\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + [\hat{a}^\dagger]^2\right) = \frac{m\omega_0}{2}\left(-\hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] - [\hat{a}^\dagger]^2\right)$$
$$= \frac{m\omega_0}{2}\left(-\hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\hat{1} - [\hat{a}^\dagger]^2\right),$$

et par conséquent

$$\langle p^2\rangle = \langle u_n|\hat{p}^2|u_n\rangle = \frac{m\hbar\omega_0}{2}(2n+1).$$

(c) On note que $\langle(O - \langle O\rangle)^2\rangle = \langle O^2\rangle - \langle O\rangle^2$ pour n'importe quelle observable O. Comme ici $\langle x\rangle = 0$ et $\langle p\rangle = 0$, il suit que $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle}$ et $\Delta p = \sqrt{\langle p\rangle^2}$. Par conséquent

$$\Delta x\Delta p = \frac{\hbar}{2}(2n+1).$$

3. (a) Dans les conditions indiquées, l'énergie potentielle d'une charge dans un champ électrique est $V(x) = -QE_{\text{el}}x$ et l'opérateur hamiltonien prend la forme

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{x}^2}_{\hat{H}^{(0)}} - QE_{\text{el}}\hat{x}.$$

(b) Utilisant la méthode du complément quadratique, on peut également écrire

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(\hat{x}^2 - \frac{2QE_{\text{el}}}{m\omega_0^2}\hat{x}\right) = \underbrace{\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(\hat{x} - x_0\hat{1}\right)^2}_{\hat{H}^{(1)}} - \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2\hat{1},$$

$$x_0 = \frac{QE_{\text{el}}}{m\omega_0^2}.$$

Si l'on définit $|u_n^{(1)}\rangle$ comme états propres de $\hat{H}^{(1)}$, tel que

$$\hat{H}^{(1)}|u_n^{(1)}\rangle = E_n^{(1)}|u_n^{(1)}\rangle,$$

on voit que

$$\begin{aligned}\langle x|u_n^{(1)}\rangle &= \langle x - x_0|u_n^{(0)}\rangle,\\ E_n^{(1)} &= E_n^{(0)} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0.\end{aligned}$$

Introduisant le décalage d'énergie

$$\Delta E = -\frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 = -\frac{Q^2E_{\text{el}}^2}{2m\omega_0^2},$$

il suit que

$$\hat{H}|u_n\rangle = (E_n^{(1)} + \Delta E)|u_n\rangle,$$

où

$$\begin{aligned}|u_n\rangle &= |u_n^{(1)}\rangle,\\ E_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 + \Delta E.\end{aligned}$$

On peut introduire l'opérateur $\hat{T}$ qui transforme $|u_n^{(0)}\rangle$ en $|u_n^{(1)}\rangle$ via $|u_n^{(1)}\rangle = \hat{T}|u_n^{(0)}\rangle$,

$$\hat{T} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|x\rangle\langle x - x_0|.$$

(c) Choisir E_{el} tel que $E_0 = E_0^{(0)} + \Delta E = 0$, où $E_0^{(0)} = \hbar\omega_0/2$. Ceci donne

$$E_{\text{el}} = \frac{\omega_0}{Q}\sqrt{m\hbar\omega_0}.$$

1. (a) Le commutateur pour la composante x du moment cinétique peut être développé comme suit,

$$\begin{aligned}[\hat{L}_x, \hat{V}(\vec{\hat{r}})] &= [(\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y), \hat{V}(\vec{\hat{r}})] = [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{V}(\vec{\hat{r}})] - [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{V}(\vec{\hat{r}})] \\ &= \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{V}(\vec{\hat{r}})] + \underbrace{[\hat{y}, \hat{V}(\vec{\hat{r}})]}_{=\hat{0}}\hat{p}_z - \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{V}(\vec{\hat{r}})] - \underbrace{[\hat{z}, \hat{V}(\vec{\hat{r}})]}_{=\hat{0}}\hat{p}_y.\end{aligned}$$

Dans le cours nous avons vu que $[\hat{p}, f(\hat{x})] = -i\hbar\partial f(\hat{x})/\partial\hat{x}$ pour un mouvement unidimensionnel. Ceci devient

$$[\hat{p}_k, f(\vec{\hat{r}})] = -i\hbar\frac{\partial f(\vec{\hat{r}})}{\partial\hat{r}_k}, \quad k = x, y, z,$$

où $\hat{r}_x \equiv \hat{x}$ etc. Par conséquent

$$[\hat{L}_x, \hat{V}(\vec{\hat{r}})] = -i\hbar\left(\hat{y}\frac{\partial V(\vec{\hat{r}})}{\partial\hat{z}} - \hat{z}\frac{\partial V(\vec{\hat{r}})}{\partial\hat{y}}\right).$$

De la même façon

$$\begin{aligned}[\hat{L}_y, \hat{V}(\vec{\hat{r}})] &= -i\hbar\left(\hat{z}\frac{\partial V(\vec{\hat{r}})}{\partial\hat{x}} - \hat{x}\frac{\partial V(\vec{\hat{r}})}{\partial\hat{z}}\right), \\ [\hat{L}_z, \hat{V}(\vec{\hat{r}})] &= -i\hbar\left(\hat{x}\frac{\partial V(\vec{\hat{r}})}{\partial\hat{y}} - \hat{y}\frac{\partial V(\vec{\hat{r}})}{\partial\hat{x}}\right),\end{aligned}$$

ou bien

$$\boxed{[\vec{\hat{L}}, \hat{V}] = -i\hbar\vec{\hat{r}} \wedge \nabla\hat{V}(\vec{\hat{r}})}$$

(b) Avec la forme donnée pour $\hat{H}$ il suit que

$$[\hat{H}, \vec{\hat{L}}] = \left[\frac{\vec{\hat{p}}^2}{2m}, \vec{\hat{L}}\right] + [\hat{V}(\vec{\hat{r}}), \vec{\hat{L}}] = \left[\frac{\vec{\hat{p}}^2}{2m}, \vec{\hat{L}}\right] + i\hbar\vec{\hat{r}} \wedge \nabla\hat{V}(\vec{\hat{r}}).$$

Nous avons d'abord

$$[\hat{p}_x^2, \hat{L}_x] = [\hat{p}_x^2, (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)] = \hat{p}_x[\hat{p}_x, (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)] + [\hat{p}_x, (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)]\hat{p}_x = \hat{0},$$

car $\hat{p}_x$ commute avec $\hat{y}$ et $\hat{z}$, ainsi qu'avec $\hat{p}_y$ et $\hat{p}_z$. Ensuite

$$\begin{aligned}[\hat{p}_y^2, \hat{L}_x] &= [\hat{p}_y^2, (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)] = \hat{p}_y[\hat{p}_y, (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)] + [\hat{p}_y, (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)]\hat{p}_y \\ &= \hat{p}_y\left\{[\hat{p}_y, \hat{y}\hat{p}_z] - \underbrace{[\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_y]}_{=\hat{0}}\right\} + \left\{[\hat{p}_y, \hat{y}\hat{p}_z] - \underbrace{[\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_y]}_{=\hat{0}}\right\}\hat{p}_y \\ &= \hat{p}_y\left\{\hat{y}\underbrace{[\hat{p}_y, \hat{p}_z]}_{=\hat{0}} + \underbrace{[\hat{p}_y, \hat{y}]}_{-i\hbar\hat{1}}\hat{p}_z\right\} + \left\{\hat{y}\underbrace{[\hat{p}_y, \hat{p}_z]}_{=\hat{0}} + \underbrace{[\hat{p}_y, \hat{y}]}_{-i\hbar\hat{1}}\hat{p}_z\right\}\hat{p}_y = -2i\hbar\hat{p}_z\hat{p}_y.\end{aligned}$$

et de la même façon

$$[\hat{p}_z^2, \hat{L}_x] = [\hat{p}_z^2, (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)] = \hat{p}_z[\hat{p}_z, (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_z)] + [\hat{p}_z, (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y]\hat{p}_z$$

$$= \hat{p}_z \left\{ \underbrace{[\hat{p}_z, \hat{y}\hat{p}_z]}_{=\hat{0}} - [\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_y] \right\} + \left\{ \underbrace{[\hat{p}_z, \hat{y}\hat{p}_z]}_{=\hat{0}} - [\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_y] \right\} \hat{p}_z$$

$$-\hat{p}_z \left\{ \hat{z}\underbrace{[\hat{p}_z, \hat{p}_y]}_{=\hat{0}} + \underbrace{[\hat{p}_z, \hat{z}]}_{=-i\hbar\hat{1}} \hat{p}_y \right\} + \left\{ \hat{z}\underbrace{[\hat{p}_z, \hat{p}_y]}_{=\hat{0}} + \underbrace{[\hat{p}_z, \hat{z}]}_{=-i\hbar\hat{1}} \hat{p}_y \right\} \hat{p}_z = 2i\hbar\hat{p}_y\hat{p}_z$$

Comme $\hat{p}_y\hat{p}_z = \hat{p}_z\hat{p}_y$, il suit que

$$[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2, \mathbf{L}_x] = \hat{0},$$

ce ce montre de la même façon pour les autres composantes du moment cinétique. Par conséquent

$$\left[\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}, \hat{\vec{L}} \right] = \hat{0}.$$

Si le potentiel possède une symétrie radiale, $V(\vec{r}) = V(r)$, où $r = |\vec{r}|$, il suit que

$$\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \Rightarrow \vec{r} \wedge \vec{\nabla} V(\vec{r}) = \vec{0}.$$

Par conséquent

$$[\hat{H}, \hat{\vec{L}}] = \left[\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}, \hat{\vec{L}} \right] + [\hat{V}(\hat{\vec{r}}), \hat{\vec{L}}] = \left[\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}, \hat{\vec{L}} \right] + i\hbar\hat{\vec{r}} \wedge \nabla\hat{V}(\hat{\vec{r}}) = \hat{0}.$$

Comme $[\hat{H}, \hat{\vec{L}}] = \hat{0}$, le moment cinétique est conservé.

(c) On écrit

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = [(\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y), (\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z)]$$

$$= [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] - \underbrace{[\hat{y}\hat{p}_z, \hat{x}\hat{p}_z]}_{=\hat{0}} - \underbrace{[\hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x]}_{=\hat{0}} + [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z] = \hat{y}\underbrace{[\hat{p}_z, \hat{z}]}_{-i\hbar\hat{1}}\hat{p}_x + \hat{x}\underbrace{[\hat{z}, \hat{p}_z]}_{i\hbar\hat{1}}\hat{p}_y$$

$$= i\hbar(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x) = i\hbar\hat{L}_z.$$

On trouve de la même façon que $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$ et $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x$. Par conséquent

$$\boxed{[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z, \quad \text{cycl.}}$$

Afin de calculer $[\hat{L}_k, \hat{\vec{L}}^2]$ on développe $[\hat{L}_k, \hat{\vec{L}}^2] = [\hat{L}_k, \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2]$. Pour $k = x$ on a en particulier

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_x^2] = \hat{0},$$
$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y^2] = \hat{L}_y[\hat{L}_x, \hat{L}_y] + [\hat{L}_x, \hat{L}_y]\hat{L}_y = i\hbar(\hat{L}_y\hat{L}_z + \hat{L}_z\hat{L}_y),$$
$$[\hat{L}_x, \hat{L}_z^2] = \hat{L}_z[\hat{L}_x, \hat{L}_z] + [\hat{L}_x, \hat{L}_z]\hat{L}_z = -i\hbar(\hat{L}_z\hat{L}_y + \hat{L}_y\hat{L}_z).$$

Avec ceci
$$[\hat{L}_x, \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2] = \hat{0}.$$
Utilisant la même approche pour les autres composantes on confirme que
$$\boxed{[\hat{L}_k, \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2] = [\hat{L}_k, \hat{\vec{L}}^2] = \hat{0}}$$

2. — On développe d'abord
$$\boxed{\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z} = (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)(\hat{L}_x - i\hat{L}_y) + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z$$
$$= \hat{L}_x^2 - i\hat{L}_x\hat{L}_y + i\hat{L}_y\hat{L}_x + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z = \hat{L}_x^2 - i\underbrace{[\hat{L}_x, \hat{L}_y]}_{i\hbar\hat{L}_z} + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z$$
$$\boxed{= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2}$$
— De la même façon
$$\boxed{\hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z} = (\hat{L}_x - i\hat{L}_y)(\hat{L}_x + i\hat{L}_y) + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z$$
$$= \hat{L}_x^2 + i\hat{L}_x\hat{L}_y - i\hat{L}_y\hat{L}_x + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z = \hat{L}_x^2 + i\underbrace{[\hat{L}_x, \hat{L}_y]}_{i\hbar\hat{L}_z} + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z$$
$$\boxed{= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2}$$
— En utilisant $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$ (cycl.), on voit que
$$\boxed{[\hat{L}_+, \hat{L}_z]} = [(\hat{L}_x + i\hat{L}_y), \hat{L}_z] = [\hat{L}_x, \hat{L}_z] + i[\hat{L}_y, \hat{L}_z]$$
$$= -i\hbar\hat{L}_y - \hbar\hat{L}_x \boxed{= -\hbar\hat{L}_+}$$
— De la même façon
$$\boxed{[\hat{L}_-, \hat{L}_z]} = [(\hat{L}_x - i\hat{L}_y), \hat{L}_z] = [\hat{L}_x, \hat{L}_z] - i[\hat{L}_y, \hat{L}_z]$$
$$= -i\hbar\hat{L}_y + \hbar\hat{L}_x \boxed{= \hbar\hat{L}_-}$$
— Comme $[\hat{L}_k, \hat{\vec{L}}^2] = \hat{0}$ ($k = x, y, z$), $\hat{\vec{L}}^2$ commute également avec toute combinaison linéaire des $\hat{L}_k$, et par conséquent $[\hat{L}_\pm, \hat{\vec{L}}^2] = \hat{0}$.

3. En s'inspirant de la démonstration du cours que $\langle \mathbf{r}|[\hat{V}, \hat{L}_k]|\mathbf{r}'\rangle = 0$ si $V(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|)$, on écrit d'abord
$$\langle \mathbf{p}|[\hat{T}, \hat{L}_k]|\mathbf{p}'\rangle = \int d^3p'' \langle \mathbf{p}|\hat{T}|\mathbf{p}''\rangle\langle \mathbf{p}''|\hat{L}_k|\mathbf{r}'\rangle - \int d^3p'' \langle \mathbf{p}|\hat{L}_k|\mathbf{p}''\rangle\langle \mathbf{p}''|\hat{T}|\mathbf{p}'\rangle.$$
En utilisant que
$$\langle \mathbf{p}|\hat{T}|\mathbf{p}'\rangle = T(\mathbf{p})\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad \text{où} \quad T(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m},$$

on trouve pour le premier terme

$$\int d^3p''\langle\mathbf{p}|\hat{T}|\mathbf{p}''\rangle\langle\mathbf{p}''|\hat{L}_k|\mathbf{p}'\rangle = \int d^3p''\, T(\mathbf{p})\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'')\left\{i\hbar\hat{\rho}_{p''_k}\delta(\mathbf{p}''-\mathbf{p})\right\}$$
$$= i\hbar T(\mathbf{p})\hat{\rho}_{p_k}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'),$$

et pour le deuxième

$$\int d^3p''\langle\mathbf{p}|\hat{L}_k|\mathbf{p}''\rangle\langle\mathbf{p}''|\hat{T}|\mathbf{p}'\rangle = \int d^3p''\,\left\{i\hbar\hat{\rho}_{p_k}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'')\right\}T(\mathbf{p}'')\delta(\mathbf{p}''-\mathbf{p})$$
$$= i\hbar\hat{\rho}_{p_k}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')T(\mathbf{p}') = i\hbar\hat{\rho}_{p_k}\left\{\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')T(\mathbf{p})\right\}$$
$$= i\hbar T(\mathbf{p})\hat{\rho}_k\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') + i\hbar\left\{\hat{\rho}_k T(\mathbf{p})\right\}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}').$$

Il suit alors que

$$\langle\mathbf{p}|[\hat{T},\hat{L}_k]|\mathbf{p}'\rangle = i\hbar\left\{\hat{\rho}_k T(\mathbf{p})\right\}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}').$$

Utilisant maintenant

$$T(\mathbf{D}(\mathbf{e}_k,\epsilon)\cdot\mathbf{p}) \approx T(\mathbf{p}) + \epsilon\hat{\rho}_k T(\mathbf{p}), \qquad (|\epsilon| \ll 1).$$

on voit que $\hat{\rho}_{p_k}T(\mathbf{p}) = 0$ si $T(\mathbf{D}(\mathbf{e}_k,\epsilon)\cdot\mathbf{p}) = T(\mathbf{p})$, i.e. si T est invariant sous une rotation de l'argument $\mathbf{p}$. Comme $T(\mathbf{p}) \propto |\mathbf{p}|^2$, ceci le cas et on peut conclure

$$\boxed{\langle\mathbf{p}|[\hat{T},\hat{L}_k]|\mathbf{p}'\rangle = 0}$$