1. Avec $|v\rangle = c|u\rangle$ ($c \in \mathbb{C}$) on obtient $\langle v|v\rangle = |c|^2\langle u|u\rangle$. Comme $\langle u|u\rangle = 1$ et $\langle v|v\rangle = 1$, il suit que $|c|^2 = 1$. La forme la plus générale pour c est

$$c = \exp(i\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

Dans un espace vectoriel réel c doit être réel et $c = \pm 1$.

2. Soit $\{|a_i\rangle\}$ ($i = 1, 2$) une base orthonormée de l'espace vectoriel unitaire en deux dimensions, tel que $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$, et soit $|u\rangle = u_1|a_1\rangle + u_2|a_2\rangle$ un vecteur normé, $\langle u|u\rangle = |u_1|^2 + |u_2|^2 = 1$. Pour un vecteur $|v\rangle = v_1|a_1\rangle + v_2|a_2\rangle$, avec $|v\rangle \perp |u\rangle$, on a les conditions

$$\langle u|v\rangle = u_1^* v_1 + u_2^* v_2 = 0,$$
$$\langle v|v\rangle = |v_1|^2 + |v_2|^2 = 1.$$

Ces conditions sont vérifiées si

$$v_1 = u_2^* \exp(i\phi), \quad v_2 = -u_1^* \exp(i\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

Par conséquent

$$|v\rangle = u_2^* \exp(i\phi)|a_1\rangle - u_1^* \exp(i\phi)|a_2\rangle, \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

Il y a donc un nombre infini de vecteurs $|v\rangle \perp |u\rangle$, car ϕ est arbitraire. Si l'espace vectoriel est réel, $\exp(i\phi)$ est réel si $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$. Il n'y a donc que deux solutions,

$$|v_1\rangle = u_2|a_1\rangle - u_1|a_2\rangle$$
$$|v_2\rangle = -u_2|a_1\rangle + u_1|a_2\rangle = -|v_1\rangle.$$

3. (a) Par définition, la base $\{|a_i\rangle\}$ ($i = 1, 2$) est orthonormée, $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$. Avec ceci

$$\langle b_1|b_1\rangle = \frac{1}{2}\langle a_1|a_1\rangle + \frac{i}{2}\langle a_1|a_2\rangle - \frac{i}{2}\langle a_2|a_1\rangle + \frac{1}{2}\langle a_2|a_2\rangle = 1,$$
$$\langle b_1|b_2\rangle = \frac{1}{2}\langle a_1|a_1\rangle - \frac{i}{2}\langle a_1|a_2\rangle - \frac{i}{2}\langle a_2|a_1\rangle - \frac{1}{2}\langle a_2|a_2\rangle = 0,$$
$$\langle b_2|b_1\rangle = \langle b_2|b_1\rangle^* = 0,$$
$$\langle b_2|b_2\rangle = \frac{1}{2}\langle a_1|a_1\rangle - \frac{i}{2}\langle a_1|a_2\rangle + \frac{i}{2}\langle a_2|a_1\rangle + \frac{1}{2}\langle a_2|a_2\rangle = 1.$$

La base "B" est donc orthormée, $\langle b_i|b_j\rangle = \delta_{ij}$.

(b) Pour la base "A"

$$|a_1\rangle \leftrightarrow \mathbf{a}_1^{(A)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |a_2\rangle \leftrightarrow \mathbf{a}_2^{(A)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la base "B"

$$|b_1\rangle \leftrightarrow \mathbf{b}_1^{(A)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad |b_2\rangle \leftrightarrow \mathbf{b}_2^{(A)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(c)

$$|b_1\rangle^\dagger \leftrightarrow \mathbf{b}_1^{(A)\,\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad |b_2\rangle^\dagger \leftrightarrow \mathbf{b}_2^{(A)\,\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(d) Partant de

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|a_2\rangle,$$
$$|b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|a_2\rangle.$$

on trouve $|b_1\rangle + |b_2\rangle = \sqrt{2}|a_1\rangle$ et $|b_1\rangle - |b_2\rangle = \sqrt{2}i|a_2\rangle$, d'où

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|b_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b_2\rangle \leftrightarrow \mathbf{a}_1^{(B)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$
$$|a_2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}|b_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|b_2\rangle \leftrightarrow \mathbf{a}_2^{(B)} = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(e) On part de $|b_j\rangle = \hat{U}|a_j\rangle$. Avec ceci

$$U_{ij}^{(A)} = \langle a_i|\hat{U}|a_j\rangle = \langle a_i|b_j\rangle.$$

Dans la base A l'opérateur $\hat{U}$ est représenté par la matrice unitaire

$$\mathbf{U}^{(A)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

L'opérateur $\hat{U}$ même peut être écrit dans la forme

$$\hat{U} = \sum_{k=1}^{2} |b_k\rangle\langle a_k|.$$

(f) Avec $\boldsymbol{\chi}^{(A)}$

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle.$$

Comme $|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|b_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b_2\rangle$ (voir dessus), il suit alors que

$$|\chi\rangle = \frac{1}{2}|b_1\rangle + \frac{1}{2}|b_2\rangle,$$

et par conséquent

$$\boldsymbol{\chi}^{(B)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

(g) Les éléments de $\hat{T}$ dans la base B sont

$$T_{ij}^{(B)} = \langle b_i|\hat{T}|b_j\rangle = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\langle b_i|a_k\rangle\langle a_k|\hat{T}|a_l\rangle\langle a_l|b_j\rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\langle b_i|a_k\rangle T_{kl}^{(A)}\langle a_l|b_j\rangle = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} U_{ki}^{(A)\,*}T_{kl}^{(A)}U_{lj}^{(A)}.$$

Ceci montre que

$$\mathbf{T}^{(B)} = \mathbf{U}^{(A)\,\dagger}\mathbf{T}^{(A)}\mathbf{U}^{(A)},$$

explicitement

$$\mathbf{T}^{(B)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (a) $\hat{T}^\dagger$ est donné par

$$\hat{T}^\dagger = \{\langle u|\}^\dagger\{|u\rangle\}^\dagger = |u\rangle\langle u| = \hat{T}.$$

L'opérateur $\hat{T}$ est donc hermitien.

(b) Pour que $\hat{T}$ soit un projecteur, il faut que

$$\hat{T}^{\,2} = |u\rangle\langle u|u\rangle\langle u| = \||u\rangle\|^2\hat{T} = \hat{T}.$$

$\hat{T}$ est un projecteur si $\||u\rangle\|^2 = 1$.

(c) Les valeurs et vecteurs propres d'un projecteur $\hat{P}$ sont définis par la relation $\hat{P}\,|\eta_j\rangle = \lambda_j|\eta_j\rangle$. Application de $\hat{P}$ par la gauche donne

$$\hat{P}^{\,2}\,|\eta_j\rangle = \lambda_j\hat{P}\,|\eta_j\rangle = \lambda_j^2|\eta_j\rangle.$$

D'autre part, $\hat{P}^{\,2} = \hat{P}$ et $\hat{P}^{\,2}\,|\eta_j\rangle = \hat{P}\,|\eta_j\rangle = \lambda_j|\eta_j\rangle$. Par conséquent

$$\lambda_j^2 = \lambda_j \Rightarrow \lambda_j = 0 \text{ ou } \lambda_j = 1.$$