Exercices *Outils pour la physique – statistique*, L2 physique
Probabilités discrètes

Excercice 1 : *Probabilité discrète uniforme*

On considère une variable aléatoire discrète, X, qui peut prendre des valeurs $x = k$, pour $k \in 1, 2, \ldots N$ ($N > 1$), qui sont distribuées uniformément avec $p_k = 1/N$.

1. Calculer la fonction génératrice des moments,
$$G(t) = \sum_{k=1}^{N} p_k e^{tk}.$$
2. Calculer les moments $\langle x^l \rangle$ pour $n = 0, 1, 2$, en utilisant
$$\langle x^l \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{\partial^l G(t)}{\partial t^l}.$$
Pourquoi faut-il utiliser la limite $t \to 0$ et non l'évaluation à $t = 0$?
3. Calculer l'écart-type, σ. Comment est-ce qu'il se comporte pour $N \to \infty$?
4. Calculer $\langle x \rangle$ et σ pour un dé.

Excercice 2 : *Moments centraux*

Les moments centraux de la distribution $p(x)$ d'une variable aléatoire, X, sont définis par
$$m_l^{(c)} = \left\langle (x - \langle x \rangle)^l \right\rangle, \quad l = 0, 1, 2, \ldots.$$

1. Donner l'expression générale de la fonction génératrice des moments centraux, $G_c(t)$, pour une variable aléatoire, X, discrète, qui prend des valeurs $x = x_k$, pour $k, 0, 1, 2, \ldots$.
2. Montrer que $m_2^{(c)} = c_2$, où c_2 est le deuxième cumulant de $p(x)$. On rappelle que $c_2 = \sigma^2$, où σ est l'écart type.
3. Calculer $G_c(t)$ pour la distribution de Poisson avec une valeur moyenne μ et donner $m_l^{(c)}$ pour $l = 1, \ldots, 4$.

Excercice 3 : *Séries pour $G(t)$ et $\log(G(t))$*

Montrer que
$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n \frac{t^n}{n!}, \quad \log(G(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$$
où m_n et c_n sont, respectivement, les moments et les cumulants associés à la distribution dont $G(t)$ est la fonction génératrice des moments.

Excercice 1 : *Changement de variable, distribution univariate*

On donne la density de probabilité pour une variable aléatoire X avec distribution gaussienne,

$$p(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

Donner la density de probabilité pour la nouvelle variable $Y = X^2$.

Excercice 2 : *Changement de variables, distribution bivariate*

On donne la density de probabilité pour deux variables aléatoires X, Y avec distribution gaussienne,

$$p(x, y) = \frac{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2}.$$

Donner la density de probabilité en coordonnées polaires, (r, ϕ), qui sont définies par $x = r\cos\phi$ et $y = r\sin\phi$.

Excercice 3 : *Distribution bivariate, forme générale*

La density de probabilité pour une variable aléatoire multi-composante $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec distribution gaussienne a la forme générale

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T.\boldsymbol{\sigma}^{-2}.(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}}{\sqrt{2\pi}^n \det(\boldsymbol{\sigma})},$$

où $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T$, et $\boldsymbol{\sigma}$ est une matrice définie positive de dimensions $n \times n$. Ici on considère d'abord le cas $n = 2$, avec

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la densité de probabilité conjointe, $p(x_1, x_2)$, et les densités partielles pour x_1 et x_2.
2. Donner les densité de probabilité conditionnelles, $p(x_1|x_2)$ et $p(x_2|x_1)$ et montrer qu'elle sont normalisées.
3. Trouver la transformée de variables $\{x_1, x_2\} \to \{y_1, y_2\}$ dans lesquelles $\tilde{p}(y_1, y_2) = \tilde{p}(y_1)\tilde{p}(y_2)$ et donner $\tilde{p}(y_1)$, $\tilde{p}(y_2)$, $\tilde{p}(x_1|x_2)$ et $\tilde{p}(x_2|x_1)$.
4. Comment est-ce que $\tilde{p}(y_1, y_2)$ change si $\boldsymbol{\mu} = (-1, 1)^T$?
5. Donner la fonction génératrice des moments pour $\tilde{p}(y_1, y_2)$ et pour $p(x_1, x_2)$ (dans cet ordre !).