



## Examen *Outils de la physique*, L2 physique S3 (/20)

03/01/2023. Documents autorisés : notes de cours et de TD

### Exercice 1 : Equations linéaires homogènes

6 points

On considère la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & a \end{pmatrix}.$$

Pour quelle valeur de  $a$  y a-t-il une solution non-triviale du système d'équations linéaires homogène,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ? Donner la forme générale de cette solution.

### Exercice 2 : Rotations, vitesse angulaire

8 points

On donne les matrices de rotation

$$\mathbf{D}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t\Omega_1) & -\sin(t\Omega_1) & 0 \\ \sin(t\Omega_1) & \cos(t\Omega_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t\Omega_2) & 0 & \sin(t\Omega_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(t\Omega_2) & 0 & \cos(t\Omega_2) \end{pmatrix},$$

qui décrivent, respectivement, une rotation autour des axes  $z$  et  $y$  d'un repère euclidien fixe ("laboratoire").

Donner les vitesses angulaires correspondantes,  $\boldsymbol{\omega}_1(t)$  et  $\boldsymbol{\omega}_2(t)$ , par rapport à ce repère fixe, ainsi que la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}(t)$  de la matrice de la rotation composée  $\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}_2(t) \cdot \mathbf{D}_1(t)$  par rapport au même repère.

**Conseil :** Garder la factorisation de la matrice  $\mathbf{D}(t)$  pour les calculs évite de longues expressions.

### Exercice 3 : Fonctions de matrices

6 points

On considère des matrices de la forme

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices  $\mathbf{U}_1(t) \equiv \exp(t\mathbf{J}_1)$  et  $\mathbf{U}_2(t) \equiv \exp(t\mathbf{J}_2)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .

**Conseil :** Calculer  $\mathbf{J}_1^2$  et  $\mathbf{J}_2^2$  et utiliser la série de Taylor pour  $\exp(x)$ .