Exemples calcul de vecteurs propres

Définitions

Vecteurs propres via élimination de Gauss

Exemple 3 du cours

Matrice 3×3 non-symértique

In[ ]:=
```
MatrixForm[A〚3〛]
forme matricielle
```

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ -4 & 9 & -4 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Ici il y a deux valeurs propres différentes

In[ ]:=
```
evalues〚3〛
```

Out[ ]= {2, 1, 1}

Calculer la matrice $\mathbf{B}[\lambda] = \mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{1}$ pour toutes les valeurs propres

In[ ]:=
```
MatrixForm[B3[λ_] = A〚3〛 - λ * IdentityMatrix[size〚3〛]]
forme matricielle                matrice d'identité
```

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & 6 & -3 \\ -4 & 9-\lambda & -4 \\ -4 & 8 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

In[ ]:=
```
B3list = Table[B3[evalues〚3, k〛], {k, 1, Length[evalues〚3〛]}];
         table                              longueur
```

In[ ]:=
```
Table[MatrixForm[B3list〚k〛], {k, 1, Length[evalues〚3〛]}]
table  forme matricielle                longueur
```

Out[ ]=

$$\left\{\begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -4 & 7 & -4 \\ -4 & 8 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -4 & 8 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -4 & 8 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}\right\}$$

Pour chaque valeur propre le système $\mathbf{B}[\lambda_k]\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a une ou plusieurs solutions. Insertion de $\lambda_1$et élimination de Gauss sur mène à un nouveau système de la forme $\mathbf{R}[\lambda_1]\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$, où $\mathbf{R}$ a la forme

In[ ]:=
```
MatrixForm[R31 = RowReduce[B3list〚1〛]]
forme matricielle  réduis rangée
```

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci montre que $x_3$est arbitraire, car l'équation 0 x_3 = 0 est vérifié pour n'importe quel x_3. ON peut donc écrire **x** =$(x_1, x_2, \alpha)^T$ avec un α arbitraire. La relation $\mathbf{R}[\lambda_1]\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mène donc à deux équations linéaire pour x_1, x_2

In[∘]:=
```
R31.{x1, x2, α} == {0, 0, 0}
```

Out[∘]= $\left\{-\frac{3\,\alpha}{4} + x_1,\ -\alpha + x_2,\ 0\right\} == \{0, 0, 0\}$

dont la solution est

In[∘]:=
```
sol31 = Solve[R31.{x1, x2, α} == {0, 0, 0}, {x1, x2}]
```
résous

Out[∘]= $\left\{\left\{x_1 \to \frac{3\,\alpha}{4},\ x_2 \to \alpha\right\}\right\}$

La solution de $\mathbf{B}[\lambda_1]\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est donc

In[∘]:=
```
MatrixForm[evector31 = {sol31[[1, 1, 2]], sol31[[1, 2, 2]], α}]
```
forme matricielle

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{3\,\alpha}{4} \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

et le premier vecteur propre normalisé est

In[∘]:=
```
MatrixForm[Normalize[D[evector31, α]]]
```
forme matricielle normalise dérivée d

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{41}} \\ \frac{4}{\sqrt{41}} \\ \frac{4}{\sqrt{41}} \end{pmatrix}$$

Pour la deuxième valeur propre on a

In[∘]:=
```
MatrixForm[R32 = RowReduce[B3list[[2]]]]
```
forme matricielle réduis rangée

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ici x_3 and x_3 sont arbitraires et on écrit **x** =$(x_1, \alpha, \beta)^T$. Ceci donne une équation pour x_1

In[∘]:=
```
R32.{x1, α, β} == {0, 0, 0}
```

Out[∘]= $\{-2\,\alpha + \beta + x_1,\ 0,\ 0\} == \{0, 0, 0\}$

dont la solution est

In[∘]:=
```
sol32 = Solve[R32.{x1, α, β} == {0, 0, 0}, x1]
```
résous

Out[∘]= $\{\{x_1 \to 2\,\alpha - \beta\}\}$

La solution de $\mathbf{B}[\lambda_1]\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est donc un ensemble de vecteurs de la forme

In[ ]:=
```
MatrixForm[evector32 = {sol32[[1, 1, 2]], α, β}]
```
forme matricielle

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2\,\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

et les deux vecteurs propres normalisés sont

In[ ]:=
```
MatrixForm[Normalize[D[evector32, α]]]
```
forme matricielle normalise dérivée d

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

In[ ]:=
```
MatrixForm[Normalize[D[evector32, β]]]
```
forme matricielle normalise dérivée d

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Exemple 5 du cours

Matrice 3×3 non-symétrique

In[ ]:=
```
MatrixForm[A[[5]]]
```
forme matricielle

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 8 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Ici nous avons les mêmes valeurs propres que dans l'exemple précédent

In[ ]:=
```
evalues[[5]]
```

Out[ ]= {2, 1, 1}

Calculer la matrice **B**[λ] = **A** - λ **1** pour toutes les valeurs propres

In[ ]:=
```
MatrixForm[B5[λ_] = A[[5]] - λ * IdentityMatrix[size[[5]]]]
```
forme matricielle matrice d'identité

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 4 & -1-\lambda & 0 \\ 8 & -7 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

In[ ]:=
```
B5list = Table[B5[evalues[[5, k]]], {k, 1, Length[evalues[[5]]]}];
```
table longueur

In[ ]:=
```
Table[MatrixForm[B5list[[k]]], {k, 1, Length[evalues[[5]]]}]
```
table | forme matricielle | longueur

Out[ ]=
$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 8 & -7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -7 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Insertion de $\lambda_1$dans $\mathbf{B}[\lambda_k]\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et élimination de Gauss sur mène ici à $\mathbf{R}[\lambda_1]\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$, où $\mathbf{R}$ a la forme

In[ ]:=
```
MatrixForm[R51 = RowReduce[B5list[[1]]]]
```
forme matricielle | réduis rangée

Out[ ]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci montre que $x_3$est arbitraire et on peut donc écrire $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \alpha)^T$ avec un α arbitraire. La relation $\mathbf{R}[\lambda_1]\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mène de nouveau à deux équations linéaire pour x_1, x_2

In[ ]:=
```
R51.{x1, x2, α} == {0, 0, 0}
```

Out[ ]=
$$\left\{-\frac{3\,\alpha}{4} + x_1, -\alpha + x_2, 0\right\} == \{0, 0, 0\}$$

dont la solution est

In[ ]:=
```
sol51 = Solve[R51.{x1, x2, α} == {0, 0, 0}, {x1, x2}]
```
résous

Out[ ]=
$$\left\{\left\{x_1 \to \frac{3\,\alpha}{4}, x_2 \to \alpha\right\}\right\}$$

La solution de $\mathbf{B}[\lambda_1]\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est donc un ensemble de vecteurs de la forme

In[ ]:=
```
MatrixForm[evector51 = {sol51[[1, 1, 2]], sol51[[1, 2, 2]], α}]
```
forme matricielle

Out[ ]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} \frac{3\,\alpha}{4} \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

et le vecteur propre normalisé correspondant est

In[ ]:=
```
MatrixForm[D[evector51, α]]
```
forme matricielle | dérivée d

Out[ ]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour la deuxième valeur propre nous avons

In[ ]:=
```
MatrixForm[R52 = RowReduce[B5list[[2]]]]
```
forme matricielle | réduis rangée

Out[ ]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci montre que x_3 est arbitraire et on écrit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \alpha)^T$ et la relation $\mathbf{R}[\lambda_1]\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mène donc à deux équations linéaires pour x_1, x_2

In[ ]:=
```
R52.{x1, x2, α} == {0, 0, 0}
```

Out[ ]=
$$\left\{-\frac{\alpha}{3} + x_1, -\frac{2\alpha}{3} + x_2, 0\right\} == \{0, 0, 0\}$$

qui ont la solution

In[ ]:=
```
sol52 = Solve[R52.{x1, x2, α} == {0, 0, 0}, {x1, x2}]
```
résous

Out[ ]=
$$\left\{\left\{x_1 \to \frac{\alpha}{3}, x_2 \to \frac{2\alpha}{3}\right\}\right\}$$

La solution de $\mathbf{B}[\lambda_1]\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est donc un ensemble de vecteurs de la forme

In[ ]:=
```
MatrixForm[evector52 = {sol52[[1, 1, 2]], sol52[[1, 2, 2]], α}]
```
forme matricielle

Out[ ]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{3} \\ \frac{2\alpha}{3} \\ \alpha \end{pmatrix}$$

et le vecteur propre normalisé correspondant est

In[ ]:=
```
MatrixForm[Normalize[D[evector52, α]]]
```
forme matricielle normalise dérivée d

Out[ ]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \sqrt{\frac{2}{7}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas diagonalisable, car elle n'a que deux vecteurs propres linéairement indépendants.