

# Introduction à la mécanique quantique

Gerald Kneller

24 mars 2016

# Limites de la physique classique

## Corps noir

Le rayonnement d'un corps noir, i.e. une source de rayonnement parfaitement absorbante en équilibre thermique avec l'environnement (voir figure), est décrit par la loi de Planck<sup>1</sup>

$$u(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}.$$

Ici Planck suppose

que le champ électromagnétique à l'intérieur du corps noir est décrit par un ensemble de "photons" d'énergie  $h\nu$ , où

$h = 6.62606957 \times 10^{-34} \text{m}^2\text{kg/s}$  est la constante de Planck. Si  $h\nu \ll k_B T$  on obtient la loi ("classique") de Rayleigh

$$u(\nu, T) \approx \frac{2\nu^2}{c^2} k_B T.$$

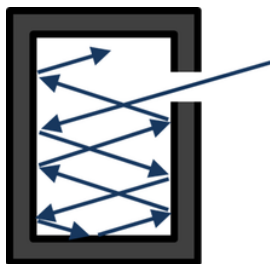


FIGURE : Réalisation d'un corps noir (Wikipedia).

1. Max Planck, physicien allemand, 1858-1947.

# Limites de la physique classique

Physique atomique, spectroscopie

L'énergie d'un électron dans l'atome d'hydrogène ne prend que certaines valeurs discrètes,  $E_n$ . Les longueurs d'onde des photons absorbés ou émis par des transitions électroniques  $m \rightarrow n$  sont

$$\lambda_{mn} = \frac{1}{R_H} \frac{1}{1/m^2 - 1/n^2},$$

où  $R_H$  est la constante de Rydberg<sup>2</sup> ( $R_H = 109677.576 \text{ cm}^{-1}$ ).

---

2. Johannes Rydberg, 1854 – 1919, physicien suédois.

# Limites de la physique classique

## Expérience de Stern-Gerlach – spin quantique

En 1922 Otto Stern<sup>3</sup> et Walther Gerlach<sup>4</sup> conçurent une expérience avec laquelle ils ont pu montrer que le spin d'une particule – son moment cinétique intrinsèque – ne prend que des valeurs discrètes par rapport à une direction quelconque qui est définie par un champ magnétique. Stern et

Gerlach utilisèrent des atomes d'argent, avec un spin total  $1/2$  en unités de  $\hbar$ , ce qui donne deux traits sur l'écran (spin parallèle ou antiparallèle au champ magnétique – voir figure).

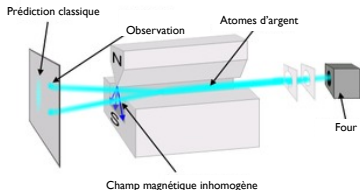


FIGURE : Expérience de Stern et Gerlach.

3. Otto Stern, 1888 – 1969, physicien allemand.

4. Walther Gerlach, 1889–1979, physicien allemand.

# Dualité onde-particule

## Relations de De Broglie


Les constituants de la matière, comme les électrons et les neutrons, et les photons comme “constituants de la lumière” peuvent se comporter comme des particules ou comme des ondes.<sup>5</sup> D’après Louis de Broglie<sup>6</sup> on peut associer une longueur d’onde et une fréquence à toute particule :

$$\lambda = \frac{h}{p},$$
$$\nu = \frac{E}{h}.$$

Ici  $h$  est la constante de Planck et  $p = |\vec{p}|$  est le module de la quantité du mouvement de la particule en question.

---

5. Voir cours “La dualité onde-corpuscule avec des ”photons uniques” par Alain Aspect, <https://www.youtube.com/watch?v=o4Ib579nBxQ>

6. Louis De Broglie, physicien français, 1892-1987. 



# Equations d'onde

## Particule libre – onde plane

Une particule libre, ayant une quantité de mouvement  $\vec{p}$  constante, est associée avec une onde plane. On écrit d'abord

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad \text{où} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \text{et} \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} \quad \text{est le vecteur d'onde}$$

qui pointe en direction de  $\vec{p}$ . Deuxièmement on écrit

$$E = \hbar \omega, \quad \text{où} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

et  $T$  est la période de l'onde. Avec ceci la fonction d'onde associée est

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)},$$

où  $A$  est une amplitude constante et  $\vec{r}$  la position où l'onde est observée.

# Equations d'onde – cont.

## Equation de Schrödinger pour une particule libre

Utilisant que

$$\begin{aligned}i\hbar\partial_t\psi(\vec{r}, t) &= E\psi(\vec{r}, t) \\ -i\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{r}, t) &= \vec{p}\psi(\vec{r}, t) \\ E &= \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2m} \quad \text{pour une particule non-relativiste libre}\end{aligned}$$

on trouve que  $\psi(\vec{r}, t)$  vérifie l'équation différentielle

$$\boxed{i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi} \quad \text{où} \quad \Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Ceci est l'équation de Schrödinger<sup>7</sup> pour une particule libre .



# Equations d'onde – cont.

## Equation d'onde pour un photon

La relation de dispersion pour un photon s'écrit

$$E = cp$$

où  $p = |\vec{p}|$  et  $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$  est la vitesse de la lumière dans le vide. Utilisant de nouveau que

$$\begin{aligned}i\hbar\partial_t\psi(\vec{r}, t) &= E\psi(\vec{r}, t) \\ -i\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{r}, t) &= \vec{p}\psi(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

ainsi que  $E^2 = c^2p^2$  on arrive à l'équation d'onde pour un photon,

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\psi = 0}$$

Noter : La constante  $\hbar$  n'y apparait pas. Cette équation d'onde est "non-quantique" et elle émane aussi des équations de Maxwell.

# Equations d'onde – cont.

## Equation de Klein-Gordon

Pour une particule relativiste massive “libre”, la relation entre quantité du mouvement et énergie s'écrit

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$$

où  $m$  est la masse au repos de la particule. Utilisant de nouveau que

$$\begin{aligned}i\hbar\partial_t\psi(\vec{r}, t) &= E\psi(\vec{r}, t) \\ -i\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{r}, t) &= \vec{p}\psi(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

on trouve ici

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

Ceci est l'équation de Klein-Gordon.<sup>8</sup>

8. Oskar Klein, 1894 – 1977, physicien suédois. Walter Gordon, 1893 – 1939, physicien allemand.

## Equations d'onde – cont.

Equation de Schrödinger pour une particule dans un potentiel

Si la particule se trouve dans un potentiel  $V(\vec{r})$ , son énergie (constante) est

$$E = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m} + V(\vec{r})$$

et la généralisation de l'équation de Schrödinger s'écrit

$$i\hbar\partial_t\psi = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}) \right\} \psi$$

On appelle

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$$

l'opérateur de Hamilton.

# Equations d'onde – cont.

## Interprétation de $\psi(\vec{r}, t)$

- ▶ Dans le cas de l'équation d'onde “non-quantique” du photon,  $\psi$  représente le potentiel scalaire  $\phi(\vec{r}, t)$  du champ électromagnétique où une composante du potentiel vectoriel  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ .
- ▶ Dans le cas de l'équation de Schrödinger

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r$$

représente la *probabilité de présence* de la particule considérée dans un volume  $d^3r$  autour de  $\vec{r}$ . Par conséquence

$$\int \int \int |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = 1$$

On note que cette intégrale diverge pour une onde plane si le volume d'intégration est infini !

# Equation de Schrödinger

## Equation stationnaire

*Ansatz* de factorisation pour  $\psi(\vec{r}, t)$  :

$$\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r})v(t), \quad \text{où} \quad v(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Insertion dans

$$i\hbar\partial_t\psi = \mathcal{H}\psi$$

mène à l'équation de Schrödinger stationnaire pour (ESS)  $u(\vec{r})$ ,

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}) \right\} u = E u$$

En fonction des conditions de bornes la solution de cette équation n'existe que pour certaines valeurs discrètes de  $E$  ("énergies quantisées"). Pour les solutions stationnaires on a

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = |u(\vec{r})|^2 d^3r.$$

# Equation de Schrödinger

## Conservation de la probabilité

Partant de

$$i\hbar\partial_t\psi = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right\}\psi \quad \text{et} \quad -i\hbar\partial_t\psi^* = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right\}\psi^*$$

on trouve que

$$\underbrace{\psi^*\partial_t\psi + \psi\partial_t\psi^*}_{\partial_t(\psi^*\psi)} = \frac{i\hbar}{2m} \{\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^*\}.$$

Utilisant que  $\psi^*\Delta\psi - \psi\Delta\psi^* = \vec{\nabla} \cdot (\psi^*\vec{\nabla}\psi) - \vec{\nabla} \cdot (\psi\vec{\nabla}\psi^*)$  on arrive à une *équation de continuité* pour la densité de probabilité,

$$\boxed{\partial_t|\psi|^2 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0} \quad \text{où} \quad \vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} \left\{ \psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^* \right\}.$$

# Particule dans un puits de potentiel (1-d)

Eq. de Schrödinger stationnaire

Un puits quantique est un modèle très simple pour un électron confiné, par exemple dans un atome ou dans un semi-conducteur. Ici le potentiel a la forme

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < L/2, \\ V_0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $0 < V_0 < \infty$ , et  
 $u(x) \neq 0$  pour  $|x| > L/2$ . Les ESS  
sont

▶  $u'' + k^2 u = 0$  pour  $|x| \leq L/2$

▶  $u'' + \kappa^2 u = 0$  pour  $|x| > L/2$

où  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  et  $\kappa = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$ .

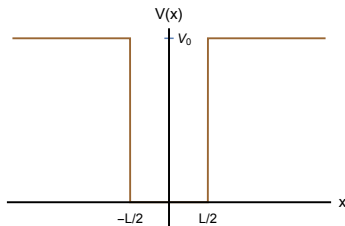


FIGURE : Le potentiel  $V(x)$ .

# Particule dans un puits de potentiel (1-d) – cont.

## Solutions

Des solutions normalisables dans les différents domaines existent uniquement si  $k_0 = \sqrt{2mV_0}/\hbar > k$  et elles ont la forme

$$u(x) = \begin{cases} A e^{x\sqrt{k_0^2 - k^2}} & \text{pour } x < -L/2 \\ C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) & \text{pour } |x| \leq L/2 \\ B e^{-x\sqrt{k_0^2 - k^2}} & \text{pour } x > L/2 \end{cases}$$

Les conditions de raccordement à  $x = \pm L/2$  sont la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u(\pm L/2 - \epsilon) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u(\pm L/2 + \epsilon) \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u'(\pm L/2 - \epsilon) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u'(\pm L/2 + \epsilon) \end{aligned}$$



# Particule dans un puits de potentiel (1-d) – cont.

## Solutions (2)

Posant  $\kappa = \sqrt{k_0^2 - k^2}$ , les constantes  $A, B, C_{1,2}$  doivent vérifier les équations linéaires

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -e^{-\frac{1}{2}L\kappa} & 0 & \cos\left(\frac{kL}{2}\right) & -\sin\left(\frac{kL}{2}\right) \\ \kappa\left(-e^{-\frac{1}{2}L\kappa}\right) & 0 & k\sin\left(\frac{kL}{2}\right) & k\cos\left(\frac{kL}{2}\right) \\ 0 & -e^{-\frac{1}{2}L\kappa} & \cos\left(\frac{kL}{2}\right) & \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \\ 0 & \kappa e^{-\frac{1}{2}L\kappa} & -k\sin\left(\frac{kL}{2}\right) & k\cos\left(\frac{kL}{2}\right) \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}(k)} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La condition pour une solution non-triviale est

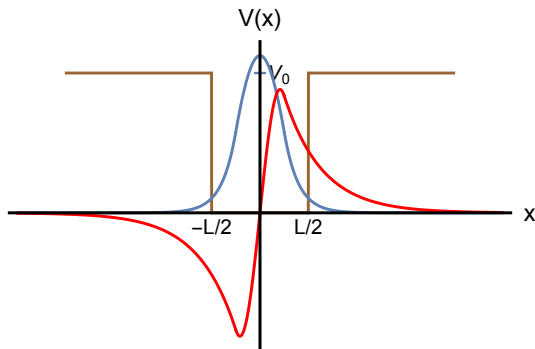
$$\det(\mathbf{M}(k)) = 0$$

et cette équation ne peut être vérifiée que pour certaines valeurs  $k = k_n \Rightarrow$  **Spectre discret d'énergies**  $E_n = \hbar^2 k_n^2 / (2m)$ .

# Particule dans un puits de potentiel (1-d) – cont.

## Illustration du “tunneling”

Il y a une probabilité de présence non-nulle dans le domaine “interdit” ( $|x| > L/2$ ) pour une particule classique :



**FIGURE :** Fonction d'onde pour l'état fondamental (ligne bleue) et pour le premier état excité (ligne rouge).

## Particule enfermée

On considère le potentiel  $V(x)$  de la section précédente avec  $V_0 \rightarrow \infty$ . Dans ce cas  $u(x) = 0$  et  $u'(x) = 0$  pour  $|x| \geq L/2$ , ou bien  $A = B = 0$ , et les équations pour  $C_{1,2}$  sont

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{kL}{2}\right) & -\sin\left(\frac{kL}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{kL}{2}\right) & \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et des solutions non-triviales existent seulement si

$$\det(\mathbf{M}) = 2 \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \cos\left(\frac{kL}{2}\right) = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} (2j+1)\frac{\pi}{L} \\ 2j\frac{\pi}{L} \end{cases}$$

Ici  $u(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)$ , où (solutions normalisées)

$$C_1 = \sqrt{2/L}, C_2 = 0 \quad \text{pour} \quad k = (2j+1)\frac{\pi}{L} \quad (\text{solutions paires})$$

$$C_1 = 0, C_2 = \sqrt{2/L} \quad \text{pour} \quad k = 2j\frac{\pi}{L} \quad (\text{solutions impaires})$$

# Particule enfermée (1d)

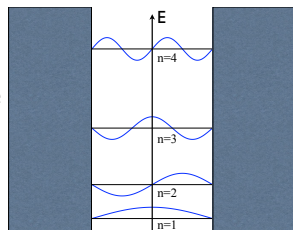
## Energie quantisée

Les solutions paires  
et impaires peuvent être combinées en

$$u_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{si } n \text{ est impaire} \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{si } n \text{ est paire} \end{cases}$$

L'énergie est "quantisée" :

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$



**FIGURE :** Les niveaux d'énergie d'une particule confinée et les fonctions d'onde associées pour  $n = 1, \dots, 4$ .

# Oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique est le modèle spectroscopique le plus simple pour une molécule biatomique, comme le  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $NO$  etc., où il décrit les forces effectives entre les atomes pour des petites elongations ou compressions.

Le potentiel d'un oscillateur harmonique a la forme

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

où  $m$  est la masse réduite des deux atomes et  $\omega_0$  la fréquence (angulaire) de l'oscillateur. L'ESS s'écrit

$$\left\{ -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \right\} u(x) = Eu(x).$$

# Oscillateur harmonique

## Solutions (1)

Les solutions de l'ESS sont

$$u_n(x) = C_n \exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2\right) \text{He}_n\left(x\sqrt{\frac{2m\omega_0}{\hbar}}\right),$$
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_0,$$

où  $n = 0, 1, 2, \dots$  et  $C_n$  sont des constantes de normalisation,

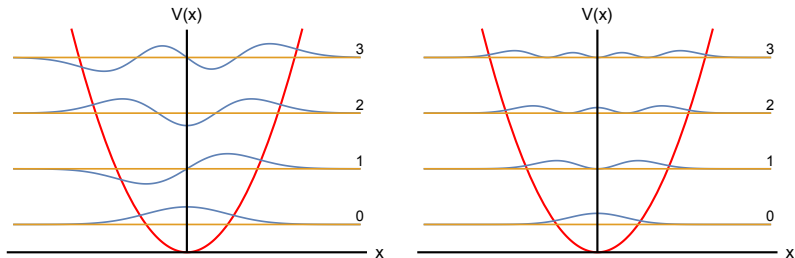
$$C_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}.$$

Les symboles  $\text{He}_n(x)$  sont les polynômes d'Hermite,

$$\text{He}_\nu(z) = (-1)^\nu \exp(z^2/2) \frac{d^\nu}{dz^\nu} \exp(-z^2/2).$$

# Oscillateur harmonique

## Solutions (2)



**FIGURE :** **A gauche :** Fonctions d'onde  $u_n(x)$  de l'oscillateur harmonique pour  $n = 0, 1, 2, 3$ . **A droite :** Probabilités de présence correspondantes.

# Paquets d'onde

## Définition

Un paquet d'onde en 1-d est défini par une superposition d'ondes planes

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp f(p) \exp\left(i\left[px - E(p)t\right]/\hbar\right)$$

où  $f(p) \in \mathbb{C}$  est normalisée,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp |f(p)|^2 = 1,$$

et  $E(p) = p^2/(2m)$ .



# Paquets d'onde – cont.

## Transformée de Fourier

Avec la transformée de Fourier et son inverse

$$\tilde{\psi}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-ipx/\hbar) \psi(x, t)$$

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp(ipx/\hbar) \tilde{\psi}(p, t),$$

on voit que

$$\tilde{\psi}(p, t) = f(p) \exp(-iE(p)t/\hbar).$$

Le théorème de Parseval montre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x, t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dp |\tilde{\psi}(p, t)|^2 = 1.$$

## Paquets d'onde – cont.

Valeurs moyennes de  $x^k$  et de  $p^k$

Avec le théorème de corrélation de la transformée de Fourier on montre que

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^k |\psi(x, t)|^2}_{\langle x^k(t) \rangle} = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \tilde{\psi}^*(p, t) \left\{ (i\hbar\partial_p)^k \tilde{\psi}(p, t) \right\}$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dp p^k |\tilde{\psi}(p, t)|^2}_{\langle p^k(t) \rangle} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^*(x, t) \left\{ (-i\hbar\partial_x)^k \psi(x, t) \right\}$$

# Paquets d'onde – cont.

## Opérateurs, valeurs moyennes

On introduit les “opérateurs”

$$\mathcal{X} \leftrightarrow x \cdot \quad (\text{action sur } \psi(x, t))$$

$$\leftrightarrow i\hbar\partial_p \quad (\text{action sur } \tilde{\psi}(p, t))$$

$$\mathcal{P} \leftrightarrow -i\hbar\partial_x \quad (\text{action sur } \psi(x, t))$$

$$\leftrightarrow p \cdot \quad (\text{action sur } \tilde{\psi}(p, t))$$

et pour un opérateur  $\mathcal{A}$  quelconque on définit la valeur moyenne correspondante par

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^*(x, t) \mathcal{A}_x \psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \tilde{\psi}^*(p, t) \mathcal{A}_p \tilde{\psi}(p, t)$$

où  $\mathcal{A}_x$  et  $\mathcal{A}_p$  sont les représentations correspondantes de  $\mathcal{A}$ .

# Paquets d'onde – cont.

## Paquet gaussien

Un paquet d'onde gaussien est défini par

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp f(p) \exp\left(i\left[px - E(p)t\right]/\hbar\right)$$

avec

$$f(p) = \frac{e^{-\frac{(p-p_0)^2}{4\sigma_p^2}}}{(2\pi\sigma_p^2)^{1/4}} \quad \text{et} \quad E(p) = p^2/(2m).$$

Dans ce cas  $\psi(x, t)$  est également une gaussienne

$$\psi(x, t) = \frac{e^{-\frac{(x-x_0(t))^2}{4\sigma_x^2(t)}}}{(2\pi\sigma_x^2(t))^{1/4}}$$

où  $\langle x \rangle = \frac{p_0}{m} t$  et  $\sigma_x(t) = \sqrt{\frac{t^2\sigma_p^2}{m^2} + \frac{\hbar^2}{4\sigma_p^2}}$ .

# Paquets d'onde – cont.

Illustration pour un paquet gaussien

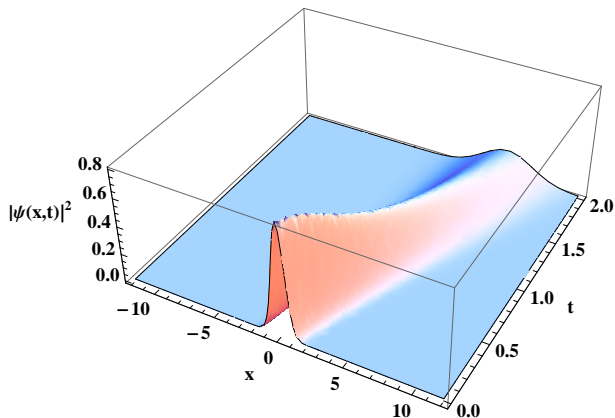


FIGURE : Evolution d'un paquet d'ondes dans le temps.

# Dynamique quantique

## Forme générale de $\psi(t)$

On considère un système quantique avec un spectre discret d'énergies (e.g. l'oscillateur harmonique, particule enfermée). Dans ce cas l'ESS s'écrit

$$\left\{ -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\} u_n(x) = E_n u_n(x)$$

où les fonctions propres  $u_n(x)$  forment une base orthonormale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx u_m^*(x) u_n(x) = \delta_{mn}.$$

La solution générale de l'équation de Schrödinger a la forme

$$\boxed{\psi(x, t) = \sum_n c_n(t) u_n(x)} \quad \text{où} \quad c_n(t) = c_n(0) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$$

et  $\sum_n |c_n(0)|^2 = 1$  assure la normalisation correcte de  $\psi(x, t)$ .

# Dynamique quantique

## Oscillations de $|\psi(x, t)|^2$

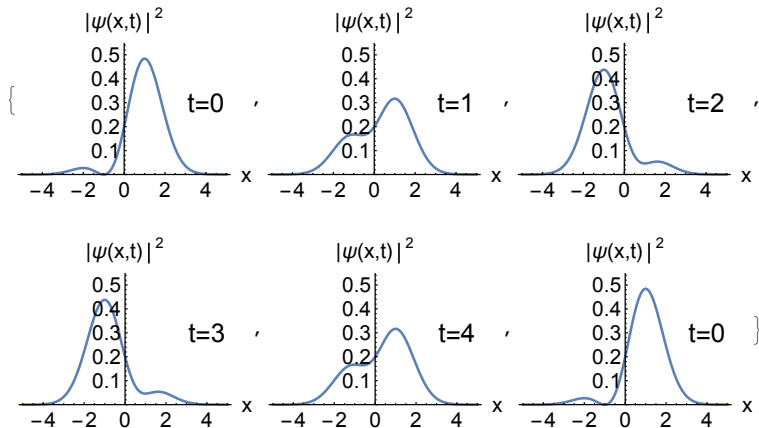
La probabilité de présence a la form générale

$$|\psi(x, t)|^2 = \sum_{m,n} c_m^*(0) c_n(0) u_m^*(x) u_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t}$$

et on voit que  $|\psi(x, t)|^2 = |u_k(x)|^2 = \text{cste}$  si le système est dans un état “pur” correspondant à l'énergie  $E_k$ .

# Dynamique quantique

## Probabilités de présence

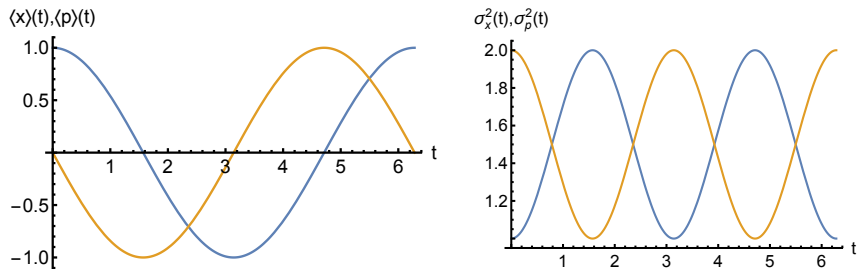


**FIGURE :** Evolution de la probabilité de présence pour l'oscillateur harmonique et  $\psi(x, t) = u_0(x)(e^{-iE_0 t/\hbar}/\sqrt{2}) + u_1(x)(e^{-iE_1 t/\hbar}/\sqrt{2})$  ( $t = kT/5$ , où  $T = 2\pi/\omega_0$ ).



# Dynamique quantique

## Valeurs moyennes



**FIGURE : A gauche :** Valeurs moyennes de  $x$  et  $p$  pour l'exemple précédent.

**A droite :** Ecart type correspondants. Les unités sont normalisées,

$$x \rightarrow \sqrt{\frac{2m\omega_0}{\hbar}} x, \quad p \rightarrow \sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega_0}} p, \quad t \rightarrow t\omega_0.$$