Licence de Physique, Université d'Orléans
Examen *Mathématiques pour Sciences Physique*s – parcours Physique et Applications, 24/6/2011

(documents autorisés : notes de cours/TD)

1 Séries de Fourier (6/20)

On donne les fonctions périodiques (période 2π)

$$f(t) = \cos^2(t), \quad g(t) = t.$$

Faire un dessin des deux fonctions et calculer leur convolution périodique. Conseil : Utiliser le théorème de convolution pour les séries de Fourier.

2 Transformation de Fourier et de Laplace (8/20)

a) Soient $f(t)$ et $g(t)$ des fonctions dont les transformations de Fourier respectives, $\tilde{f}(\omega)$ et $\tilde{g}(\omega)$, existent. Soit $f(t)$ réelle et paire et $g(t)$ réelle et impaire. Montrer que

$$\tilde{f}(\omega) = 2\Re\{\hat{f}(i\omega)\},$$
$$\tilde{g}(\omega) = 2i\Im\{\hat{f}(i\omega)\},$$

où $\hat{f}(s)$ and $\hat{g}(s)$ sont les transformées de Laplace de $f(t)$ et $g(t)$, respectivement. Utiliser la définition de la transformée de Fourier du cours.

b) Utiliser ces relations afin de calculer les transformées de Fourier des fonctions ($\gamma > 0$)

$$f(t) = e^{-\gamma|t|},$$
$$g(t) = t\, e^{-\gamma|t|}.$$

3 Analyse complexe (6/20)

On donne la fonction

$$f_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C ds\, \frac{e^{st}}{s(1+s^{-\alpha})}, \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$$

où le contour C inclut toutes les singularités de l'intégrand. Calculer $f_\alpha(t)$ pour $\alpha = 0, 1, 2$.