Licence de Physique, Université d'Orléans
Examen *Mathématiques pour Sciences Physique*s – parcours Physique et Applications, 5/1/2011

Corrigé

1 Séries de Fourier (5/20)

Les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ ont la période π. Les coefficients de Fourier restent les mêmes si l'on regarde les mêmes fonctions avec la période 2π (plus généralement avec une période $k\pi$, $k = 1, 2, 3, \ldots$), i.e. avec la période de la fonction $\exp(it)$. Avec

$$f(t) = \cos^2(t) = \left(\frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2}\right)^2 = \frac{2 + \exp(2it) + \exp(-2it)}{4},$$
$$g(t) = \sin^2(t) = \left(\frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i}\right)^2 = \frac{2 - \exp(2it) - \exp(-2it)}{4},$$

on obtient

$$f_n = \begin{cases} 1/4 & \text{si } n = -2 \\ 1/2 & \text{si } n = 0 \\ 1/4 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g_n = \begin{cases} -1/4 & \text{si } n = -2 \\ 1/2 & \text{si } n = 0 \\ -1/4 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Par conséquent

$$f_n g_n = \begin{cases} -1/16 & \text{si } n = -2 \\ 1/4 & \text{si } n = 0 \\ -1/16 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \Rightarrow (f * g)_{2\pi}(t) = \boxed{(f * g)_\pi(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\cos(2t)}.$$

Une forme équivalente du résultat est

$$(f * g)_\pi(t) = \frac{1 + 2\sin^2(t)}{8}.$$

2 Transformation de Fourier (5/20)

1. La transformation de $f(t)$ est

$$\begin{aligned}
\boxed{\tilde{f}(\omega)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) \left(\frac{\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)}{2}\right)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) \left(\frac{2 + \exp(2i\omega_0 t) + \exp(-2i\omega_0 t)}{4}\right) \\
= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) &+ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i[\omega - 2\omega_0]t) + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i[\omega + 2\omega_0]t) \\
&\boxed{= \pi\delta(\omega) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega - 2\omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega + 2\omega_0)}
\end{aligned}$$

Ici la symétrie de la distribution de Dirac, $\delta(x) = \delta(-x)$, a été utilisé.

2. La transformation de $g(t)$ est

$$\boxed{\tilde{g}(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) \left(\frac{\exp(i\omega_0 t) - \exp(-i\omega_0 t)}{2i} \right)^2$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) \left(\frac{2 - \exp(2i\omega_0 t) - \exp(-2i\omega_0 t)}{4} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i[\omega - 2\omega_0]t) - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i[\omega + 2\omega_0]t)$$
$$\boxed{= \pi\delta(\omega) - \frac{\pi}{2}\delta(\omega - 2\omega_0) - \frac{\pi}{2}\delta(\omega + 2\omega_0)}$$

On remarque que $\tilde{f}(\omega) + \tilde{g}(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$, car $f(t) + g(t) = 1$.

3. On écrit $h(t) = f(t)w(t)$, où $w(t) = \exp(-[t/\sigma]^2/2)/(\sqrt{2\pi}\sigma)$. Utilisant le théorème de convolution de la transformée de Fourier dans le domaine de fréquences/pulsations, il suit que $f(t)w(t) \leftrightarrow (2\pi)^{-1}(\tilde{f} * \tilde{w})(\omega)$. Ici (voir cours) $\tilde{w}(\omega) = \exp(-\sigma^2\omega^2/2)$. Par conséquent

$$\boxed{\tilde{h}(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \, \tilde{f}(\omega - \omega')\tilde{w}(\omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \, \{\pi\delta(\omega - \omega')$$
$$+ \frac{\pi}{2}\delta(\omega - \omega' - 2\omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega - \omega' + 2\omega_0)\Big\} \exp\left(-\frac{\sigma^2\omega'^2}{2}\right)$$
$$\boxed{= \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right) + \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{\sigma^2(\omega - 2\omega_0)^2}{2}\right) + \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{\sigma^2(\omega + 2\omega_0)^2}{2}\right)}$$

3 Analyse complexe (5/20)

En utilisant la représentation de $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$, qui est valable dans le plan complexe entier, on écrit

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \, \exp(1/z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \, \left\{ 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \frac{1}{3!}z^{-3} + \dots \right\}.$$

La série dans l'intégrale est la série de Laurent de la fonction $\exp(1/z)$ et l'intégrale I est donc simplement le résidu de cette intégrale, car le contour contient la singularité essentielle à $z = 0$. Comme le résidu est le coefficient de la série de Laurent pour z^{-1}, il suit que

$$\boxed{I = \mathrm{Res}\{\exp(1/z), z = 0\} = 1}$$

4 Transformée de Laplace (5/20)

Transformation de Laplace de l'équation intégro-différentielle donne

$$s\hat{y}(s) - y(0) + \hat{h}(s)\hat{y}(s) = 0, \quad \text{où} \quad \hat{h}(s) = \frac{1}{s + \lambda}.$$

Avec $y(0) = 1$, il suit que

$$\left(s + \frac{1}{s + \lambda} \right) \hat{y}(s) = 1 \Rightarrow \hat{y}(s) = \frac{s + \lambda}{s(s + \lambda) + 1}.$$

Les pôles de $\hat{y}(s)$ sont à $s_{1,2} = \lambda/2 \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}$ et la transformée de Laplace inverse de $\hat{y}(s)$ est

$$y(t) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\oint_C ds\,\exp(st)\hat{y}(s) \;=\; \lim_{s\to s_1}\frac{(s+\lambda)\exp(st)}{s-s_2} + \lim_{s\to s_2}\frac{(s+\lambda)\exp(st)}{s-s_1}.$$

Définissant $\Omega = |\sqrt{\lambda^2 - 4}|$, on a

$$\begin{cases} \frac{e^{-\frac{\lambda t}{2}}\left(\lambda\sinh\left(\frac{t\Omega}{2}\right)+\Omega\cosh\left(\frac{t\Omega}{2}\right)\right)}{\Omega} & \text{si } \lambda^2 > 4, \\ e^{-t}(t+1) & \text{si } \lambda^2 = 4, \\ \frac{e^{-\frac{\lambda t}{2}}\left(\lambda\sin\left(\frac{t\Omega}{2}\right)+\Omega\cos\left(\frac{t\Omega}{2}\right)\right)}{\Omega} & \text{si } \lambda^2 < 4. \end{cases}$$