Exercice 2 :

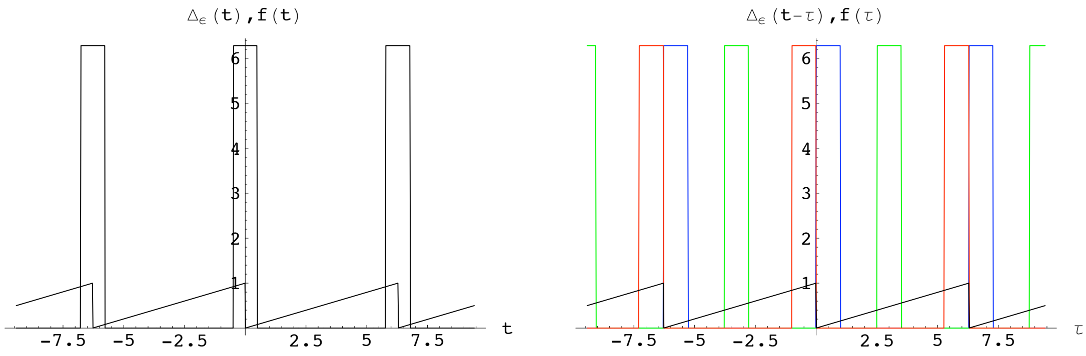

FIGURE 5 – **A gauche :** Les fonctions $\Delta_\epsilon(t)$ ($T = 2\pi$ et $\epsilon = 0.5$) et $f(t)$ de l'exerice 2. **A droite :** Les fonctions $\Delta_\epsilon(t-\tau)$ et $f(\tau)$ pour différents décalages t.

a) Pour le calcul direct de la convolution on écrit

$$(\Delta_\epsilon * f)_T(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \Delta_\epsilon(t-\tau)f(\tau),$$

et on regarde la fig. 5 pour déterminer trois cas pour le décalage de Δ_ϵ. Il faut bien comprendre qu'on fait une intégration sur τ, où $\Delta(t-\tau)$ est obtenu en décalant $\Delta(-\tau)$ vers la droite. Les trois cas sont

1. $\boxed{0 \leq t < \epsilon}$
   Ici $\Delta_\epsilon(t-\tau) \neq 0$ si $0 < \tau < \epsilon + t$ ou $2\pi - \epsilon + t < \tau < 2\pi$.
   $$(\Delta_\epsilon * f)_T(t) = \frac{1}{2\epsilon}\left\{\int_0^{t+\epsilon} d\tau\,\frac{\tau}{2\pi} + \int_{2\pi-\epsilon+t}^{2\pi} d\tau\,\frac{\tau}{2\pi}\right\} = \frac{\epsilon t + \pi(\epsilon - t)}{2\pi\epsilon}.$$
2. $\boxed{\epsilon \leq t < 2\pi - \epsilon}$
   Ici $\Delta_\epsilon(t-\tau) \neq 0$ si $t - \epsilon < \tau < t + \epsilon$.
   $$(\Delta_\epsilon * f)_T(t) = \frac{1}{2\epsilon}\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} d\tau\,\frac{\tau}{2\pi} = \frac{t}{2\pi}.$$
3. $\boxed{t < 2\pi - \epsilon \leq t < 2\pi}$
   Ici $\Delta_\epsilon(t-\tau) \neq 0$ si $0 < \tau < t - 2\pi + \epsilon$ ou $t - \epsilon < \tau < 2\pi$.
   $$(\Delta_\epsilon * f)_T(t) = \frac{1}{2\epsilon}\left\{\int_0^{t-2\pi+\epsilon} d\tau\,\frac{\tau}{2\pi} + \int_{t-\epsilon}^{2\pi} d\tau\,\frac{\tau}{2\pi}\right\} = \frac{\epsilon t - \pi(\epsilon + t) + 2\pi^2}{2\pi\epsilon}.$$

avec une période de 2π. La fonction résultante est montrée dans la fig. 6.

b) Les discontinuités possibles sont localisées à $t = 0$, $t = \epsilon$ et à $t = 2\pi - \epsilon$ (avec une période de 2π, voir fig. 6). On vérifie que

$$\begin{aligned}
(\Delta_\epsilon * f)_T(0) &= (\Delta_\epsilon * f)_T(2\pi) = \frac{1}{2},\\
(\Delta_\epsilon * f)_T(\epsilon-) &= (\Delta_\epsilon * f)_T(\epsilon+) = \frac{\epsilon}{2\pi},\\
(\Delta_\epsilon * f)_T(2\pi - \epsilon-) &= (\Delta_\epsilon * f)_T(2\pi - \epsilon+) = 1 - \frac{\epsilon}{2\pi}.
\end{aligned}$$

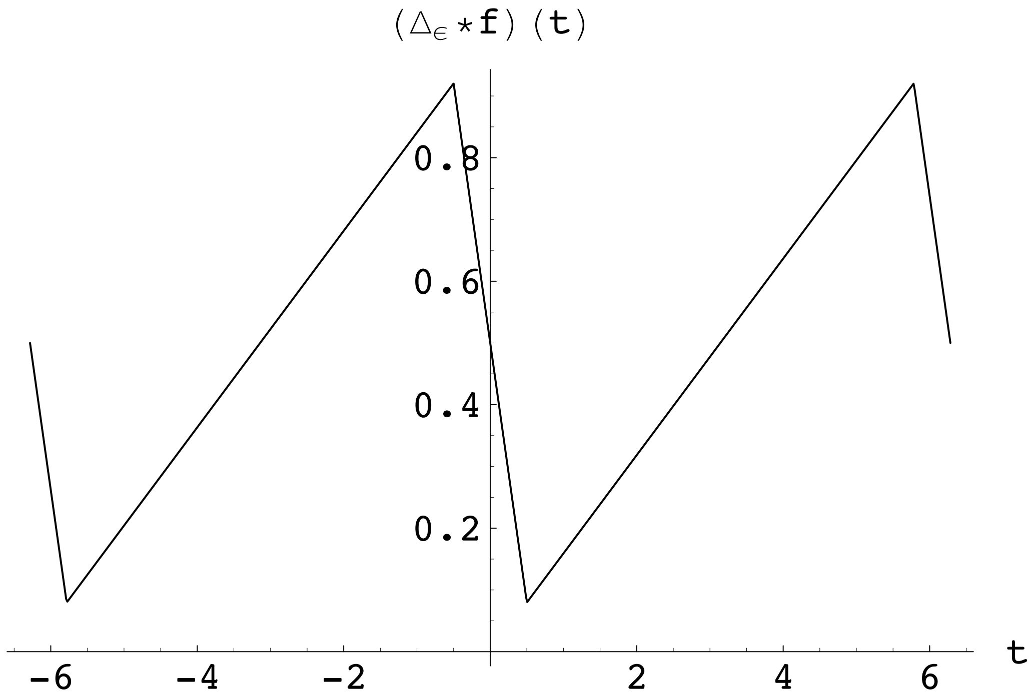

FIGURE 6 – La fonction $(\Delta_\epsilon * f)_T(t)$ de l'exercice 2 pour $\epsilon = 0.5$.

c) On voit que $\lim_{\epsilon\to 0}(\Delta_\epsilon * f)_T(t) = f(t)$ si l'on définit $f(2k\pi) = 1/2$ ($k \in \mathbb{Z}$).

d) Définissant $c(t) = (\Delta_\epsilon * f)_T(t)$, on obtient pour les coefficients de Fourier

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^\epsilon dt\,\frac{\epsilon t + \pi(\epsilon - t)}{2\pi\epsilon} + \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} dt\,\frac{t}{2\pi} + \int_{2\pi-\epsilon}^{2\pi} dt\,\frac{\epsilon t - \pi(\epsilon + t) + 2\pi^2}{2\pi\epsilon}\right\} = \frac{1}{2}.$$

et pour $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^\epsilon dt\,\exp(-int)\frac{\epsilon t + \pi(\epsilon - t)}{2\pi\epsilon} + \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} dt\,\exp(-int)\frac{t}{2\pi} + \int_{2\pi-\epsilon}^{2\pi} dt\,\exp(-int)\frac{\epsilon t - \pi(\epsilon + t) + 2\pi^2}{2\pi\epsilon}\right\} = \frac{\exp(in\epsilon) - \exp(-in\epsilon)}{4\pi n^2\epsilon}.$$

D'autre part on a

$$f(t) \quad \leftrightarrow \quad f_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si n=0,} \\ \frac{i}{2\pi n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\Delta_\epsilon(t) \quad \leftrightarrow \quad \Delta_{\epsilon,n} = \begin{cases} 1 & \text{si n=0,} \\ \frac{\sin(n\epsilon)}{n\epsilon} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc bien

$$c_n = f_n \Delta_{\epsilon,n}.$$

e) Comme

$$\lim_{\epsilon\to 0} \Delta_{\epsilon,n} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\sin(n\epsilon)}{n\epsilon} = 1$$

on confirme que

$$\lim_{\epsilon\to 0}(\Delta_\epsilon * f)_T(t) = f(t).$$