

# Traitement numérique du signal

Gerald R. Kneller

Université d'Orléans, Département de Physique ; Centre de Biophysique  
Moléculaire UPR4301 CNRS



## Table des matières

Chapitre 1. Echantillonnage de signaux continus	5
1. Fonctions périodiques dans le temps	5
2. Fonctions périodiques dans les fréquences	8
3. Théorème de Shannon	10
Chapitre 2. Transformée de Fourier discrète	13
1. Introduction	13
2. Quelques règles de calcul	15
3. La TFD pour un exemple	17
4. Convolution et corrélation discrète et périodique	19
Chapitre 3. Transformée en $z$	33
1. Définition	33
2. La transformée en $z$ pour quelques exemples	34
3. Quelques règles de calcul	35
4. Théorème de convolution	38
5. Théorème de corrélation et théorème de Parseval	39
6. Transformée en $z$ du produit de deux signaux	40
Chapitre 4. Systèmes linéaires et filtres	43
1. Représentation mathématique	43
2. Exemples	45
3. Systèmes récurrents	50
4. Le cas général	52
Bibliographie	59



## Chapitre 1

### Echantillonnage de signaux continus

#### 1. Fonctions périodiques dans le temps

On considère une fonction  $f_T(t)$  qui est construite par répétition périodique d'un motif  $f(t)$  (voir la fig. 1). Si la période est  $T > 0$ , on écrit

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - nT) \quad (1)$$

Formellement  $f_T(t)$  peut être écrite sous forme d'une convolution du motif  $f(t)$  avec un peigne de Dirac,

$$f_T(t) = (\delta_T * f)(t), \quad (2)$$

où  $\delta_T(t)$  est une répétition périodique de distributions de Dirac,

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (3)$$

En appliquant le théorème de convolution on trouve que la transformation de Fourier de  $f_T(t)$  a la forme

$$\tilde{f}_T(\omega) = \tilde{\delta}_T(\omega) \tilde{f}(\omega), \quad (4)$$

On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction  $g(t)$  et son inverse sont définies par

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) g(t), \\ g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \tilde{g}(\omega), \end{aligned}$$

respectivement. Dans le cours "Techniques Mathématiques" on avait vu qu'un peigne de Dirac peut être défini par

$$\delta_T(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 - \epsilon)^{|n|} \exp(in\omega_0 t), \quad \text{où } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

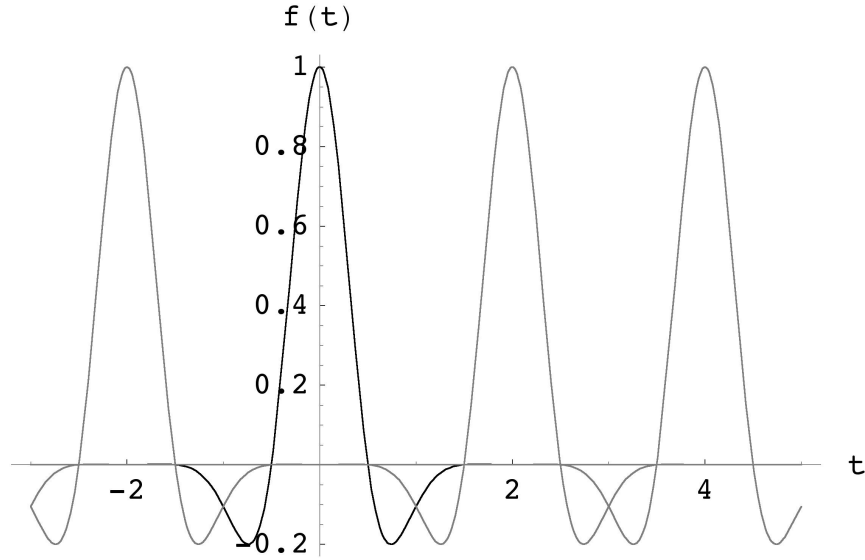


FIGURE 1. Une fonction périodique dans le temps qui est construite à partir d'un motif  $f(t)$  (noir) avec la période  $T = 2$ .

L'intégrale de Fourier, dont la forme explicite est

$$\tilde{\delta}_T(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 - \epsilon)^{|n|} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(i[n\omega_0 - i\omega]t),$$

prend la forme

$$\tilde{\delta}_T(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad (5)$$

si l'on utilise la représentation

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(\pm ixy)$$

de la distribution de Dirac. L'insertion de l'identité 5 dans (4) montre que le spectre Fourier d'une fonction périodique dans le temps est donné par un peigne de Dirac dont les pics sont pondérés par la transformée de Fourier du motif, évaluée aux points équidistants  $\omega = n\omega_0$ ,<sup>1</sup>

$$\tilde{f}_T(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \quad (6)$$

1. On note que  $\delta(y - x)f(x) = \delta(y - x)f(y)$ .

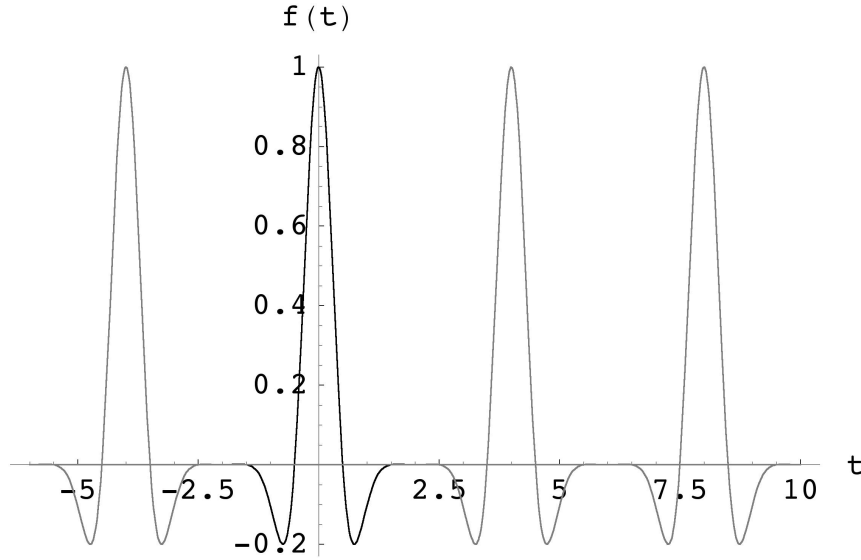


FIGURE 2. Une fonction périodique dans le temps qui est construite à partir d'un motif  $f(t)$  (noir) sans chevauchement des motifs répétés.

Par transformation de Fourier inverse on trouve que la fonction  $f_T(t)$  même peut être écrite sous la forme

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \tilde{f}(n\omega_0) \exp(in\omega_0 t) \quad (7)$$

Si  $f(t)$  est strictement zéro en dehors de l'intervalle  $[\alpha, T + \alpha]$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),  $f(t) \equiv 0$  pour  $t \notin [\alpha, T + \alpha]$ , il n'y a aucun chevauchement entre les motifs répétés (voir la figure 2) et la transformée de Fourier de  $f(t)$  est donnée par

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) f(t) = \int_{\alpha}^{T+\alpha} dt \exp(-i\omega t) f(t).$$

Dans ce cas les coefficients  $\tilde{f}(n\omega_0)/T$  sont les coefficients de Fourier de  $f_T(t)$ . On écrit d'abord

$$\frac{1}{T} \tilde{f}(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{T+\alpha} dt \exp(-in\omega_0 t) f(t),$$

et comme  $f_T(t)$  est la répétition périodique du motif  $f(t)$  on peut écrire

$$\frac{1}{T} \tilde{f}(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \exp(-in\omega_0 t) f_T(t) \equiv f_n \quad (8)$$

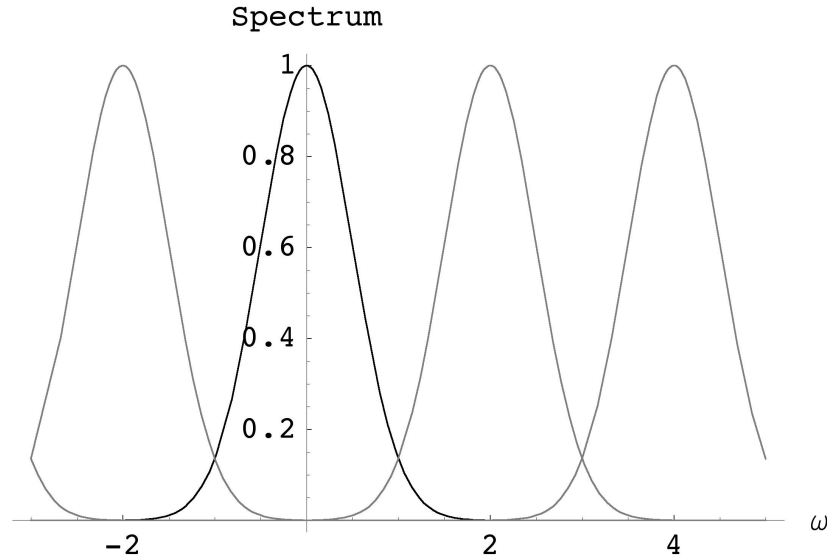


FIGURE 3. Un spectre périodique qui est construit à partir d'un motif  $\tilde{f}(\omega)$  (noir) avec la période  $\Omega = 2$ .

Par conséquent la représentation (7) est la série de Fourier de  $f_T(t)$  et le spectre de Fourier de  $f_T(t)$  est entièrement déterminé par ses coefficients de Fourier,

$$\tilde{f}_T(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (9)$$

## 2. Fonctions périodiques dans les fréquences

Maintenant on considère la situation de la section précédente dans le domaine des fréquences. On part d'une fonction  $f(t)$  dont la transformée de Fourier existe et on construit le spectre d'une nouvelle fonction  $f_\Omega(t)$  par répétition périodique du motif  $\tilde{f}(\omega)$  (voir la fig. 3),

$$\tilde{f}_\Omega(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega - n\Omega) \quad (10)$$

La période  $\Omega$  peut être exprimée sous la forme

$$\Omega = \frac{2\pi}{\Delta t} \quad (11)$$



Cette relation *définit* une quantité  $\Delta t$  dont on connaît pas encore la signification. Avec la définition

$$\tilde{\delta}_\Omega(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\Omega) \quad (12)$$

la fonction  $\tilde{f}_\Omega(\omega)$  peut être écrite sous forme d'une convolution,

$$\tilde{f}_\Omega(\omega) = (\tilde{\delta}_\Omega * \tilde{f})(\omega). \quad (13)$$

Regardons maintenant la fonction  $f_\Omega(t)$ . Afin de pouvoir calculer la transformée de Fourier inverse de  $\tilde{f}_\Omega(\omega)$  on utilise le théorème de convolution dans le domaine des fréquences (voir cours "Techniques Mathématiques"),

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t), t, \omega\} = \frac{1}{2\pi}(\tilde{f} * \tilde{g})(\omega).$$

Ici  $f(t)$  et  $g(t)$  sont deux fonctions dont les transformées de Fourier respectives existent et  $\mathcal{F}\{f(t), t, \omega\} \equiv \tilde{f}(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $f(t)$ . La transformée de Fourier inverse de  $\tilde{\delta}_\Omega(\omega)$  est obtenue de la même façon que  $\tilde{\delta}_T(\omega)$ . On remplace  $t$  par  $\omega$ ,  $T$  par  $\Omega$ , et on utilise que la transformée de Fourier inverse porte un facteur  $1/2\pi$ . Ceci donne d'abord

$$\delta_\Omega(t) = \frac{1}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta t), \quad \text{où } \Delta t = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Avec la définition (11) on peut donc écrire

$$\delta_\Omega(t) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta t) \quad (14)$$

Or, a cause du théorème de convolution dans les fréquences,  $f_\Omega(t)$  est donnée par

$$f_\Omega(t) = 2\pi f(t)\delta_\Omega(t), \quad (15)$$

et on obtient avec (14)

$$f_\Omega(t) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t)\delta(t - n\Delta t) \quad (16)$$

si l'on utilise que  $\delta(x - y)f(y) = \delta(x - y)f(y)$ . Ceci montre que  $\Delta t$  est effectivement un pas d'échantillonnage dans le temps, comme  $\omega_0$  est un pas d'échantillonnage dans les fréquences.

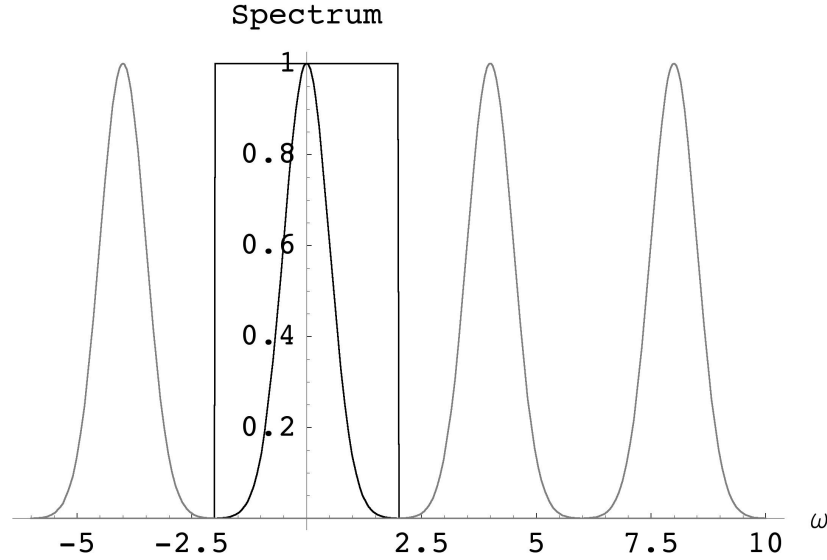


FIGURE 4. Un spectre périodique qui est construit à partir d'un motif  $\tilde{f}(\omega)$  (noir) sans chevauchement des motifs répétés. La fenêtre rectangulaire  $\tilde{h}(\omega)$  coupe  $\tilde{f}(\omega)$  de  $\tilde{f}_\Omega(\omega)$ .

Par transformation de Fourier de la forme (16) de  $f_T(t)$  on voit que son spectre (10) peut également être écrit sous la forme

$$\tilde{f}_\Omega(\omega) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega n \Delta t) f(n \Delta t) \quad (17)$$

Ceci est une *approximation* de la transformée de Fourier de  $f(t)$ . On note que (17) est l'équivalent de (7), où la fonction échantillonnée,  $f(n \Delta t)$ , joue le rôle du spectre échantillonnée,  $\tilde{f}(n\omega_0)$ .

### 3. Théorème de Shannon

Comme dans la section précédente on considère un spectre périodique,  $\tilde{f}_\Omega(\omega)$ , qui est construit à partir d'un motif  $\tilde{f}(\omega)$ . Contrairement au cas précédent, on demande explicitement qu'il n'y ait aucun chevauchement entre les motifs répétés (voir la fig. 4). On pose

$$\tilde{f}(\omega) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad |\omega| > \omega_c \quad (18)$$

où  $\omega_c > 0$  est une pulsation de coupure. Les motifs répétés ne se recouvrent pas si

$$\Omega > 2\omega_c \quad (19)$$

Si l'on introduit la fenêtre rectangulaire

$$\tilde{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq \frac{\Omega}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (20)$$

il est évident que

$$\tilde{f}(\omega) = \tilde{f}_\Omega(\omega)\tilde{h}(\omega). \quad (21)$$

En appliquant le théorème de convolution on trouve alors que

$$f(t) = (f_\Omega * h)(t), \quad (22)$$

où  $h(t)$  est la transformée de Fourier inverse de  $\tilde{h}(\omega)$ ,

$$h(t) = \frac{\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)}{\pi t}. \quad (23)$$

Avec  $\Omega = 2\pi/\Delta t$  on peut aussi écrire

$$h(t) = \frac{1}{\Delta t} \text{sinc}\left(\frac{\Omega t}{2}\right), \quad (24)$$

où  $\text{sinc } x = \sin x/x$  est le sinus cardinal de  $x$ . La convolution (22) donne alors avec (16)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) \text{sinc}\left(\frac{\Omega}{2}[t - n\Delta t]\right).$$

En utilisant  $\Omega = 2\pi/\Delta t$  on trouve

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) \text{sinc}\left(\pi \left[\frac{t}{\Delta t} - n\right]\right)} \quad (25)$$

Ceci est une *formule d'interpolation* pour  $f(t)$  qui montre que  $f(t)$  est entièrement déterminée par ses valeurs échantillonnées,  $f(n\Delta t)$ . La condition  $\Omega > 2\omega_c$  peut être exprimée sous la forme

$$\boxed{\Delta t < \frac{1}{2f_c}} \quad (26)$$

où  $f_c$  est la fréquence de coupure qui est définie par la relation  $\omega_c = 2\pi f_c$ . La relation (25) et la condition (26) constituent le *théorème de Shannon*.



## Chapitre 2

### Transformée de Fourier discrète

#### 1. Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons vu qu'un signal périodique a un spectre discret et qu'un spectre périodique correspond à une fonction discrète dans le temps. On considère maintenant une fonction périodique dont le motif est discret,

$$f_{\Omega}(t) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) \delta(t - n\Delta t) \quad (27)$$

Avec ceci on construit la fonction

$$f_{T,\Omega}(t) = (\delta_T * f_{\Omega})(t) \quad (28)$$

où  $\delta_T(t)$  est un peigne de Dirac (voir eq. (3)) avec la période

$$T = N\Delta t \quad (29)$$

La fonction  $f_{T,\Omega}(t)$  est alors entièrement définie par les valeurs échantillonnées  $\{f(0), \dots, f([N-1]\Delta t)\}$  d'une fonction  $f(t)$ . Elle est par construction discrète et périodique.

Comme dans la section 1 on calcule maintenant le spectre de Fourier de  $f_{T,\Omega}(t)$  en appliquant le théorème de convolution,

$$\tilde{f}_{T,\Omega}(\omega) = \tilde{\delta}_T(\omega) \tilde{f}_{\Omega}(\omega). \quad (30)$$

On trouve d'abord que

$$\tilde{f}_{\Omega}(\omega) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t). \quad (31)$$

Utilisant la forme (5) pour la transformée de Fourier de  $\delta_T(t)$  on obtient<sup>1</sup>

$$\tilde{f}_{T,\Omega}(\omega) = \left\{ \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \right\} \left\{ \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t) \right\}.$$

---

1. L'indice de sommation dans la première somme est  $k$ , car  $n$  est déjà utilisé comme indice de sommation dans la deuxième somme.

Maintenant on écrit  $\omega_0$  sous la forme

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{N\Delta t}} \quad (32)$$

et on utilise encore une fois  $\delta(x - y)f(x) = \delta(x - y)f(y)$ . Ceci donne

$$\boxed{\tilde{f}_{T,\Omega}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right) \right\}}_{F(k)} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N\Delta t}\right)} \quad (33)$$

En comparant avec la relation (9) on voit que Les  $F(k)$  jouent le rôle de coefficients d'une série de Fourier. On voit qu'il sont effectivement une approximation pour les coefficients de Fourier d'une fonction  $f(t)$  avec la période  $T = N\Delta t$ . Le spectre est entièrement défini par  $N$  valeurs  $\{F(k)\}$  qui sont formellement obtenues par une transformation linéaire à partir de  $N$  valeurs  $\{f(n) \equiv f(n\Delta t)\}$ ,

$$\boxed{F(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right)} \quad (34)$$

Visiblement on a

$$\boxed{F(k) = F(k + mN), \quad m \in \mathbb{Z}} \quad (35)$$

ce qui montre que le spectre (33) n'est pas seulement discret mais également périodique avec la période  $\Omega = 2\pi/\Delta t$ .

On montrera maintenant que la transformation inverse à (34) est donnée par

$$\boxed{f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \exp\left(i\frac{2\pi}{N}nk\right)} \quad (36)$$

Les relations (34) et (36) définissent la transformée de Fourier discrète (TFD) et son inverse (TFDI).

Afin de démontrer la validité de la relation (36) on montre d'abord que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi}{N}[k - l]n\right) = \delta(k - l + pN), \quad (37)$$

où  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $\delta(j)$  est le symbole de Kronecker,

$$\delta(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si } j \neq 0. \end{cases}$$

*Preuve de la relation (37) :*

— Il est trivial que la somme dans (37) donne 1 si  $k = l + pN$ .

— Pour le cas  $k \neq l + pN$  on écrit<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(i \frac{2\pi}{N} [k-l]n\right) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \exp\left(i \frac{2\pi}{N} [k-l]\right) \right\}^n \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - \exp(i2\pi[k-l])}{1 - \exp(i \frac{2\pi}{N} [k-l])} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1-1}{1 - \exp(i \frac{2\pi}{N} [k-l])} = 0. \end{aligned}$$

La relation (37) est donc confirmée.

*Preuve de la relation (36) :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \exp\left(i \frac{2\pi}{N} lk\right) &= \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} kn\right) \right\}}_{F(k)} \exp\left(i \frac{2\pi}{N} lk\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \underbrace{\left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(i \frac{2\pi}{N} [l-n]k\right) \right\}}_{\delta(l-n+pN)} = f(l) \quad \square \end{aligned}$$

## 2. Quelques règles de calcul

**2.1. Linéarité.** On donne deux paires  $f(n) \longleftrightarrow F(k)$  et  $g(n) \longleftrightarrow G(k)$ . Si  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $\beta \in \mathbb{C}$  sont des constantes il suit que

$$\boxed{\alpha f(n) + \beta g(n) \longleftrightarrow \alpha F(k) + \beta G(k)} \quad (38)$$

La preuve est triviale, car  $F(k), G(k)$  sont obtenues par une transformation linéaire.

**2.2. TFD du signal conjugué complexe.** On donne  $f(n) \longleftrightarrow F(k)$ . La TFD du signal conjugué complexe est donnée par

$$\boxed{f^*(n) \longleftrightarrow F^*(-k)} \quad (39)$$

<sup>2</sup> On rappelle que  $\sum_{n=0}^M q^n = \frac{1-q^{M+1}}{1-q}$ .

*Preuve :*

$$\begin{aligned}
f^*(n) &= \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \exp\left(i\frac{2\pi}{N}nk\right) \right\}^* = \sum_{k=0}^{N-1} F^*(k) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}nk\right) \\
&\stackrel{k \rightarrow -k'}{=} \sum_{k'=0}^{1-N} F^*(-k') \exp\left(i\frac{2\pi}{N}nk'\right) = \sum_{k'=N}^1 F^*(-k') \exp\left(i\frac{2\pi}{N}nk'\right) \\
&= \sum_{k'=1}^N F^*(-k') \exp\left(i\frac{2\pi}{N}nk'\right) = F^*(-N) + \sum_{k'=1}^{N-1} F^*(-k') \exp\left(i\frac{2\pi}{N}nk'\right) \\
&\stackrel{k' \rightarrow k}{=} F^*(0) + \sum_{k=1}^{N-1} F^*(-k) \exp\left(i\frac{2\pi}{N}nk\right) = \sum_{k=0}^{N-1} F^*(-k) \exp\left(i\frac{2\pi}{N}nk\right) \quad \square
\end{aligned}$$

Si  $f(n)$  est un signal réel,  $f^*(n) = f(n)$ , il suit que  $F(k) = F^*(-k)$ , ou bien

$$\boxed{F^*(k) = F(-k) \quad \text{si } f(n) \in \mathbb{R}} \quad (40)$$

**2.3. Réflexion de l'axe de temps.** On donne  $f(n) \longleftrightarrow F(k)$ . Il suit que

$$\boxed{f(-n) \longleftrightarrow F(-k)} \quad (41)$$

*Preuve :* On écrit  $f(-n) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \exp(-i\frac{2\pi}{N}nk)$  et change l'indice de sommation de  $k$  à  $k' = -k$ . Ensuite on suit le même chemin que pour la preuve de (39), en remplaçant  $F^*(.)$  par  $F(.)$ .

**2.4. Symétries.** Si  $f(n)$  est un signal réel, on peut combiner la relation (40) avec la relation (41). Tout signal  $f(n)$  peut être décomposé en une partie paire et une partie impaire,

$$f(n) = f^+(n) + f^-(n), \quad (42)$$

où  $f^+(n)$  et  $f^-(n)$  sont données par

$$f^+(n) = \frac{1}{2} \{f(n) + f(-n)\}, \quad (43)$$

$$f^-(n) = \frac{1}{2} \{f(n) - f(-n)\}. \quad (44)$$

La TFD donne donc

$$F^+(k) = \frac{1}{2} \{F(k) + F(-k)\} = \frac{1}{2} \{F(k) + F^*(-k)\} = \Re\{F(k)\},$$

$$F^-(k) = \frac{1}{2} \{F(k) - F(-k)\} = \frac{1}{2} \{F(k) - F^*(-k)\} = i\Im\{F(k)\}.$$

Ceci montre que

- La TFD d'un signal réel et paire est également réelle et paire.
- La TFD d'un signal réel et impaire est purement imaginaire et également impaire.



**2.5. Translation de l'axe de temps.** On donne  $f(n) \longleftrightarrow F(k)$ . Il suit que

$$\boxed{f(n+l) \longleftrightarrow F(k) \exp\left(i\frac{2\pi}{N}kl\right)} \quad (45)$$

*Preuve :* On écrit

$$\begin{aligned} f(n+l) &= \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \exp\left(i\frac{2\pi}{N}[n+l]k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ F(k) \exp\left(i\frac{2\pi}{N}kl\right) \right\} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}nk\right) \quad \square \end{aligned}$$

**2.6. Translation de l'axe des fréquences.** On donne  $f(n) \longleftrightarrow F(k)$ . Il suit que

$$\boxed{f(n) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}jn\right) \longleftrightarrow F(k+j)} \quad (46)$$

*Preuve :* On écrit

$$\begin{aligned} F(k+j) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}[k+j]n\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ f(n) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}jn\right) \right\} \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right) \quad \square \end{aligned}$$

### 3. La TFD pour un exemple

Dans cette section le formalisme de la TFD sera appliqué à un exemple concret. On considère le motif

$$f(t) = \left(\Theta(t) - \Theta(t-2\pi)\right) \frac{t}{2\pi} \quad (47)$$

qui a la forme d'une "dent de scie" (voir la figure 1). La transformée de Fourier de cette fonction est donnée par

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{\exp(-2\pi i\omega)(1+2\pi i\omega) - 1}{2\pi\omega^2}. \quad (48)$$

La figure 1 montre la partie réelle et imaginaire de  $\tilde{f}(\omega)$ . On trouve à partir de (48)

$$\Re\{\tilde{f}(\omega)\} = \frac{\cos(2\pi\omega) - 1}{2\pi\omega^2} + \frac{\sin(2\pi\omega)}{\omega}, \quad (49)$$

$$\Im\{\tilde{f}(\omega)\} = \frac{\cos(2\pi\omega)}{\omega} - \frac{\sin(2\pi\omega)}{2\pi\omega^2}. \quad (50)$$

Maintenant on regarde la continuation périodique de la fonction  $f(t)$ , avec la période  $T = 2\pi$

$$f_{2\pi} = (f * \delta_{2\pi})(t). \quad (51)$$

La fonction est montrée dans la fig. 2. Pour cette fonction on calcule maintenant les coefficients de Fourier qui sont donnés par (ici  $\omega_0 = 2\pi/T = 1$ )

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-int) f(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 0, \\ \frac{i}{2\pi n} & \text{si } n \neq 0. \end{cases} \quad (52)$$

Ceci montre que

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(n), \quad (53)$$

ce qui confirme la relation (8) pour ce cas spécifique, où  $\omega_0 = 1$ . On remarque que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{f}(\omega) = \pi. \quad (54)$$

La figure 2 montre les parties réelles et imaginaires des coefficients de Fourier qui sont données par

$$\Re\{f_n\} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases} \quad (55)$$

$$\Im\{f_n\} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \frac{1}{2\pi n} & \text{si } n \neq 0. \end{cases} \quad (56)$$

La dernière étape est la génération d'un signal discret à partir de la fonction périodique  $f_{2\pi}(t)$ . On définit le signal échantillonné

$$f(n) = f_{2\pi}(n\Delta t), \quad \Delta t = \frac{2\pi}{N}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (57)$$

La figure 3 montre le signal discret pour  $N = 8$ . La partie réelle et imaginaire de la TFD de  $f(n)$  sont également montrées, avec leur continuations périodiques.

Quelques observations importantes concernant les erreurs intrinsèques de la TFD :

- (1) A cause de la périodicité implicite du signal on génère d'abord un spectre discret où l'information n'est disponible qu'aux fréquences  $\nu = n\nu_0$ , où  $\nu_0 = 1/T$  (ou bien aux impulsions  $\omega = n\omega_0$ , où  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ ). Si le motif  $f(t)$  est strictement zéro en dehors de la période fondamentale, on a

$$f_n = \frac{1}{T} \tilde{f}(n\omega_0). \quad (58)$$

- (2) Une perte d'information supplémentaire résulte si le motif  $f(t)$  n'est pas strictement zéro en dehors de l'intervalle  $[0, T]$ . Dans ce cas les coefficients de Fourier ne donnent qu'une approximation du vrai spectre à  $\omega = n\omega_0$ ,

$$f_n \approx \frac{1}{T} \tilde{f}(n\omega_0). \quad (59)$$

- (3) Il y a l'erreur de la discrétisation de l'axe du temps qui a d'abord pour conséquence que la TFD est une approximation des coefficients de Fourier,

$$F(n) \approx f_n. \quad (60)$$

On rappelle que la discrétisation de l'axe de temps rend le spectre également périodique. Les figures 2 et 3 illustrent ces aspects. Par conséquent, la TFD  $F(n)$  est toujours une approximation du vrai spectre  $\tilde{f}(\omega)$ , même si la relation (58) est vérifiée.

Afin d'améliorer l'approximation du vrai spectre  $\tilde{f}(\omega)$  on peut

- (1) Diminuer  $\Delta t$ . De cette façon les coefficients de Fourier  $f_n$  seront mieux approchés par la TFD  $F(n)$  et la (fausse) périodicité du spectre sera réduite, car la période  $\Omega = 2\pi\Delta t$  sera plus grande.
- (2) Augmenter la période  $T$ . Ceci donne un échantillonnage de l'axe des fréquences plus fine, car  $\omega_0 = 2\pi/T$  diminue. La fausse périodicité de  $f_T(t)$  sera également réduite de cette manière.

Les figures 4, 5 et 6 montrent les effets. Dans la figure 4 on voit d'abord une amélioration de l'approximation des coefficients de Fourier  $f_n$  de la fonction  $f_{2\pi}(t)$ . Ici le nombre de points échantillonnés par intervalle est augmenté à  $N = 32$  par rapport à  $N = 8$  dans la fig. 4. On remarque que  $f(n)$  et  $F(k)$  sont données pour un seul intervalle  $N$ .

L'effet de l'augmentation de  $T$  est montré dans les figures 5 et 6. La période  $T$  est doublée de  $T = 2\pi$  à  $T = 4\pi$ . On voit bien que le spectre  $\tilde{f}(\omega)$  est mieux approché par les coefficients de Fourier  $f_n$ . On voit des points supplémentaires qui font sortir les oscillations de  $\tilde{f}(\omega)$  avec  $\omega$ . La figure 6 donne la TFD correspondante. Le pas  $\Delta t$  pour l'échantillonnage dans le temps est le même que dans la figure 4. Par conséquent  $N = 64$  pour la TFD.

## 4. Convolution et corrélation discrète et périodique

**4.1. Convolution.** Comme pour la transformée de Fourier et les séries de Fourier il existe un théorème de convolution pour la TFD. On définit d'abord la convolution pour deux fonctions périodiques et discrètes,  $f(n)$  et  $g(n)$ , par

$$(f * g)_N(n) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(n-j)g(j) \quad (61)$$

Ici  $N$  est la période des fonctions  $f(n)$  et  $g(n)$ . Le théorème de convolution de la TFD dit que

$$\boxed{(f * g)_N(n) \longleftrightarrow F(k)G(k)} \quad (62)$$

*Preuve* : On écrit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(n-j)g(j) \right\} \\ & \stackrel{n-j \rightarrow n'}{=} \frac{1}{N} \sum_{n'=-j}^{N-1-j} \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}k[n'+j]\right) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(n')g(j) \right\} \\ & \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} g(j) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kj\right) \sum_{n'=-j}^{N-1-j} f(n') \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn'\right) \\ & \stackrel{n' \rightarrow n}{=} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g(j) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kj\right)}_{G(k)} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right)}_{F(k)} = F(k)G(k) \quad \square \end{aligned}$$

Ici on utilise que  $\sum_{n'=-j}^{N-1-j} \dots = \sum_{n'=0}^{N-1} \dots$ , car  $f(\cdot) \exp(\cdot)$  est une fonction périodique avec la période  $N$ . Pour cette raison toute sommation dont la différence entre la limite supérieure et la limite inférieure est  $N$  donne le même résultat.

**4.2. Corrélation et théorème de Parseval.** La corrélation périodique entre deux fonctions discrètes,  $f(n)$  et  $g(n)$ , est définie d'une manière similaire que la convolution,

$$\boxed{(f \circ g)_N(n) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(n+j)g^*(j)} \quad (63)$$

D'après le théorème de corrélation la TFD de la corrélation est donnée par

$$\boxed{(f \circ g)_N(n) \longleftrightarrow F(k)G^*(k)} \quad (64)$$

*Preuve* : La preuve se déroule de la même façon que pour le théorème de convolution, avec quelques petites modifications :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(n+j)g^*(j) \right\} \\
& \stackrel{n+j \rightarrow n'}{=} \frac{1}{N} \sum_{n'=j}^{N-1+j} \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}k[n'-j]\right) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(n')g^*(j) \right\} \\
& \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} g^*(j) \exp\left(i\frac{2\pi}{N}kj\right) \sum_{n'=j}^{N-1+j} f(n') \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn'\right) \\
& \stackrel{n' \rightarrow n}{=} \underbrace{\frac{1}{N} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} g(j) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kj\right) \right\}^*}_{G^*(k)} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right)}_{F(k)} = F(k)G^*(k) \quad \square
\end{aligned}$$

Le théorème de Parseval est une conséquence immédiate du théorème de corrélation. On constate d'abord que la TFD de l'autocorrélation d'un signal  $f(n)$  est donnée par

$$(f \circ f)_N(n) \longleftrightarrow |F(k)|^2, \quad (65)$$

tel que

$$(f \circ f)_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^2 \exp\left(i\frac{2\pi}{N}nk\right).$$

Avec la définition (63) pour la corrélation on trouve pour le cas  $n = 0$

$$\boxed{\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |f(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^2} \quad (66)$$

Ceci est le théorème de Parseval pour la TFD. On voit bien qu'il représente une approximation du théorème de Parseval pour les séries de Fourier (voir cours "Techniques Mathématiques"),<sup>3</sup>

$$\frac{1}{T} \int_0^T d\tau |f(\tau)|^2 \equiv \overline{|f(\tau)|^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f_k|^2. \quad (67)$$

**4.3. Exemple.** Dans la suite on considérait la convolution et la corrélation de deux signaux "porte" qui sont définis par

$$f(t) = \Theta(t) - \Theta(t-1), \quad (68)$$

$$g(t) = \Theta(t-1) - \Theta(t-2). \quad (69)$$

3. Il ne faut pas confondre le  $k$ -ième coefficient de Fourier,  $f_k$ , avec le signal discret,  $f(k)$ .

Les fonctions sont montrées dans la figure 7. La convolution et la corrélation sont montrées dans la même figure, ainsi que l'auto-corrélation de  $f(n)$ . La forme simple de  $f(t)$  et de  $g(t)$  permet d'effectuer les convolutions et les corrélations d'une manière graphique. A partir de  $f(t)$  et  $g(t)$  on construit maintenant les fonctions périodiques  $f_T(t)$  et  $g_T(t)$ , avec la période  $T = 2$ . Ces fonctions, ainsi que leur (auto)convolution et leur (auto)corrélation, sont montrées dans la même figure 7 (traits fins). Pour faciliter la comparaison  $(f_T * g_T)(t)$  et  $(f_T \circ g_T)(t)$  sont multipliées par un facteur  $T = 2$ . De cette manière elles apparaissent comme continuation périodique de  $(f * g)(t)$  et  $(f \circ g)(t)$ , respectivement. Considérons maintenant la convolution et la corrélation des signaux échantionnés,  $f(n)$  et  $g(n)$ , ainsi que  $(f * f)_N(n)$  et  $(f \circ f)_N(n)$ , qui sont montrés dans la figure 8. Ici  $N = 16$  points ont été utilisés.

**4.4. Convolution et corrélation numérique efficace.** La convolution et la corrélation de signaux discrets périodiques peut être effectuée d'une manière efficace par une version rapide de la TFD – la FFT (*Fast Fourier Transform*) [1]. La FFT réduit le nombre d'opérations de la TFD, qui est de l'ordre de  $N^2$ , à  $N \log_2 N$ , si l'on utilise une puissance de deux pour  $N$ . On procède de la façon suivante :

- (1) FFT des signaux  $f(n)$  et  $g(n)$  dont on souhaite calculer la convolution ou la corrélation périodique.
- (2) Calcul de  $F(k)G(k)$  ou de  $F(k)G^*(k)$
- (3) FFT inverse (IFFT) de  $F(k)G(k)$  ou de  $F(k)G^*(k)$  donnent la convolution périodique / la corrélation périodique.

De cette manière on obtient facilement une accélération considérable, surtout si les signaux sont long. En réalité on peut facilement obtenir un facteur 1000 avec des routines FFT qui sont optimisées pour l'architecture de l'ordinateur sur lequel on travaille.

Dans la plupart des applications on cherche à trouver une approximation numérique pour la convolution ou la corrélation de signaux *non-périodiques*. Cette tâche peut être accomplie si les signaux ont une *durée finie*. La convolution discrète de deux fonction discrètes non-périodiques est définie par

$$(f * g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(n - k)g(k) \quad (70)$$

est la corrélation discrète a la forme

$$(f \circ g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(n + k)g^*(k) \quad (71)$$

4.4.1. *Convolution.* Supposons que  $f(n)$  est un signal de longueur  $P$  et  $g(n)$  est un signal de longueur  $Q$ . Dans ce cas on aurait alors

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^{Q-1} f(n-k)g(k), \quad 0 \leq n-k \leq P-1.$$

Comme  $0 \leq k \leq Q-1$  il suit que

$$\boxed{0 \leq n \leq P+Q-2} \quad (72)$$

La convolution discrète est alors non-nulle pour  $P+Q-1$  points. Afin de calculer cette convolution par TFD on imagine quelle soit périodiquement répétée sur l'axe du temps, tel que la convolution discrète qu'on souhaite calculer est le motif de cette fonction périodique. L'idée est maintenant de construire des signaux discrets  $\hat{f}(n)$  et  $\hat{g}(n)$ , tel que leur convolution *périodique* équivaut la convolution discrète non-périodique dans la période fondamentale. On construit des nouveaux signaux de longueur  $N \geq P+Q$ ,

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} f(n) & 0 \leq n \leq P-1 \\ 0 & P \leq n \leq N-1 \end{cases}, \quad (73)$$

$$\hat{g}(n) = \begin{cases} g(n) & 0 \leq n \leq Q-1 \\ 0 & Q \leq n \leq N-1 \end{cases}. \quad (74)$$

afin d'inclure au moins un point pour lequel  $(f * g)(n) = 0$ . On peut effectivement choisir  $N > P+Q$ , afin que  $N$  soit une puissance de deux. En fonction des longueurs des signaux ce choix peut être préférable afin d'obtenir l'efficacité maximale de la FFT. Avec la définition de  $\hat{f}(n)$  et de  $\hat{g}(n)$  on a

$$\boxed{(f * g)(n) = N(\hat{f} * \hat{g})_N(n), \quad 0 \leq n \leq P+Q-2} \quad (75)$$

Les figures (7) et (8) illustrent cette méthode. La construction de  $\hat{f}(n)$  et  $\hat{g}(n)$  par (73) et (74), respectivement, correspond effectivement à  $f(t) = g(t)$  dans l'exemple. Tout autre choix d'extension de  $f(n)$  et  $g(n)$  par des éléments zéro (*zero padding* en anglais) conduit simplement à une translation de la convolution périodique sur l'axe du temps. Concernant le résultat, on remarque que  $(f * g)(t) \approx \Delta t(f * g)(n)$ . Avec la relation 75 on trouve donc une approximation de la convolution non-périodique de deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  avec un support compact par

$$\boxed{(f * g)(t) \approx T(\hat{f} * \hat{g})_N(n)} \quad (76)$$

Les figures 7 et 8, où  $T = 2$ , confirment cette relation.

4.4.2. *Corrélation.* Comme dans le cas de la convolution on suppose que  $f(n)$  est un signal de longueur  $P$  et  $g(n)$  est un signal de longueur  $Q$ . Ici on écrit

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^{Q-1} f(n+k)g(k), \quad 0 \leq n+k \leq P-1.$$

afin de déterminer les bornes pour  $n$ . Avec  $0 \leq k \leq Q-1$  ces bornes sont données par

$$\boxed{-Q+1 \leq n \leq P-1} \quad (77)$$

Comme la convolution, la corrélation est non-nulle pour  $P+Q-1$  valeurs de  $n$  et la procédure pour le calcul de la corrélation discrète non-périodique la même que pour la convolution. Si  $\hat{f}(n)$  et  $\hat{g}(n)$  sont construits selon (73) et (74), respectivement, on obtient

$$\boxed{(f \circ g)(n) = N(\hat{f} \circ \hat{g})_N(n), \quad -Q+1 \leq n \leq P-1} \quad (78)$$

On rappelle que  $(\hat{f} \circ \hat{g})_N(n)$  est périodique, et  $(\hat{f} \circ \hat{g})_N(-n) = (\hat{f} \circ \hat{g})_N(N-n)$ . Comme la convolution, la corrélation est approchée par l'équivalent discret, qui est donné par (71), et on peut écrire  $(f \circ g)(t) \approx \Delta t (f \circ g)(n)$ . On trouve donc

$$\boxed{(f \circ g)(t) \approx T(\hat{f} \circ \hat{g})_N(n)} \quad (79)$$

Cette relation est l'équivalent de l'approximation (76), et elle est également confirmée par les figures 7 et 8, où  $T=2$ .



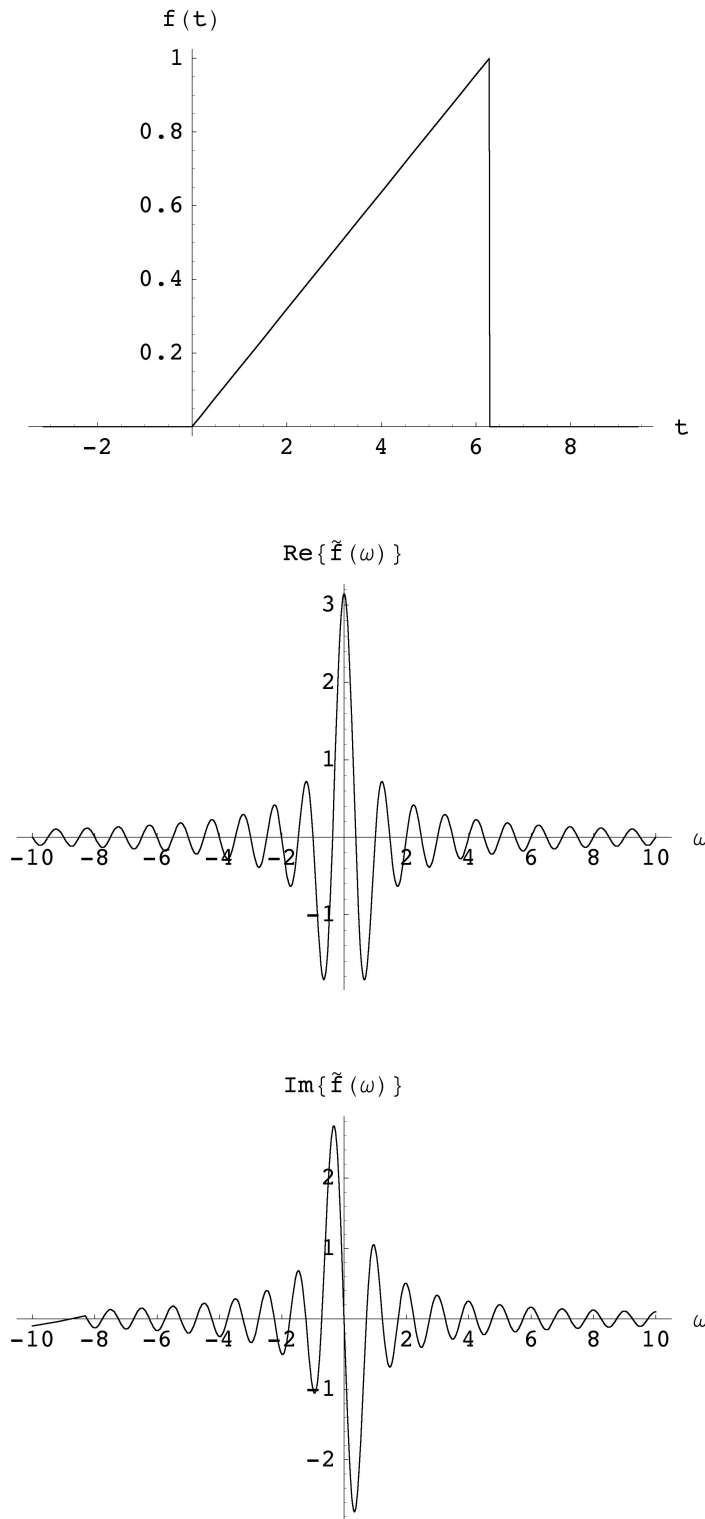


FIGURE 1. Une fonction de la forme "dent de scie",  $f(t)$ , et sa transformée de Fourier,  $\tilde{f}(\omega)$ . De haut en bas :  $f(t)$ , la partie réelle de  $\tilde{f}(\omega)$  et la partie imaginaire de  $\tilde{f}(\omega)$ .

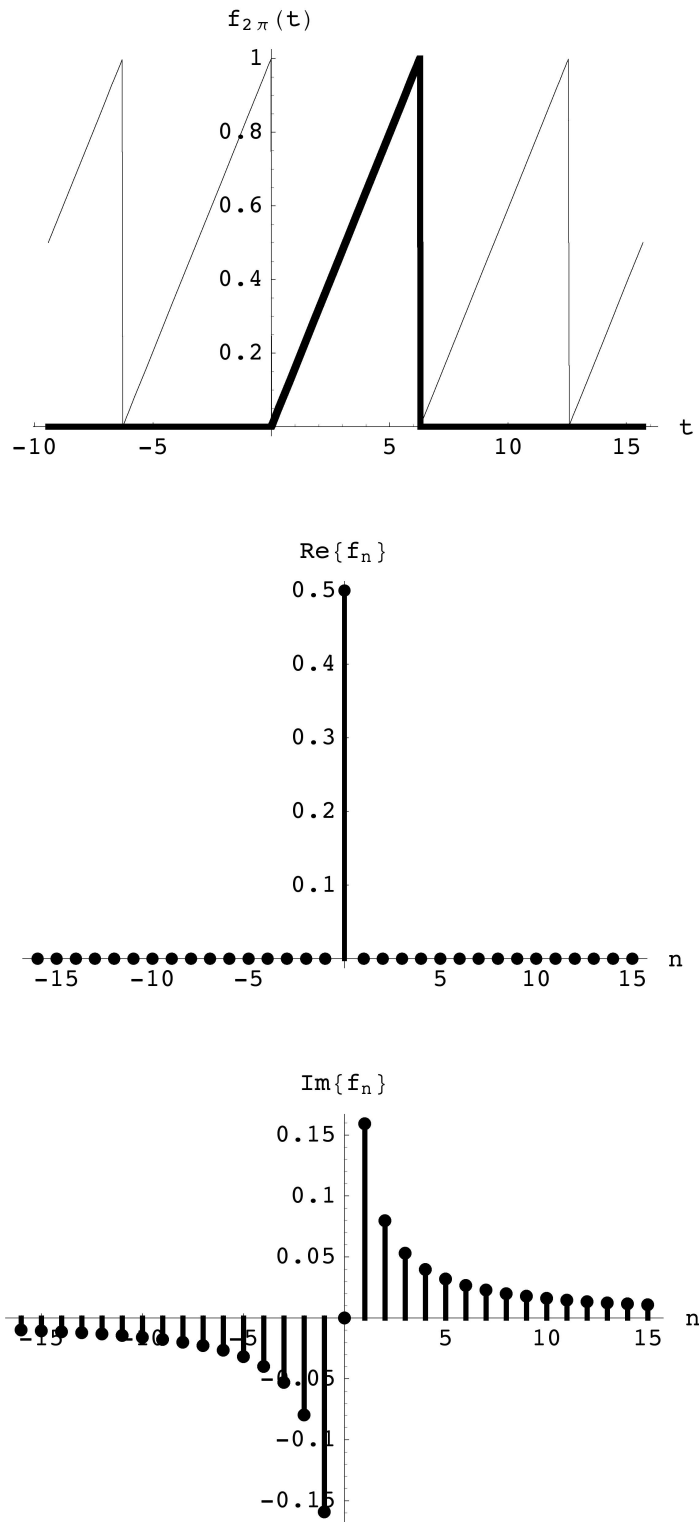


FIGURE 2. La continuation périodique de la fonction "dent de scie" et ses coefficients de Fourier,  $\{f_n\}$ . De haut en bas :  $f_{2\pi}(t)$ , la partie réelle des  $\{f_n\}$  et la partie imaginaire de  $\{f_n\}$ .

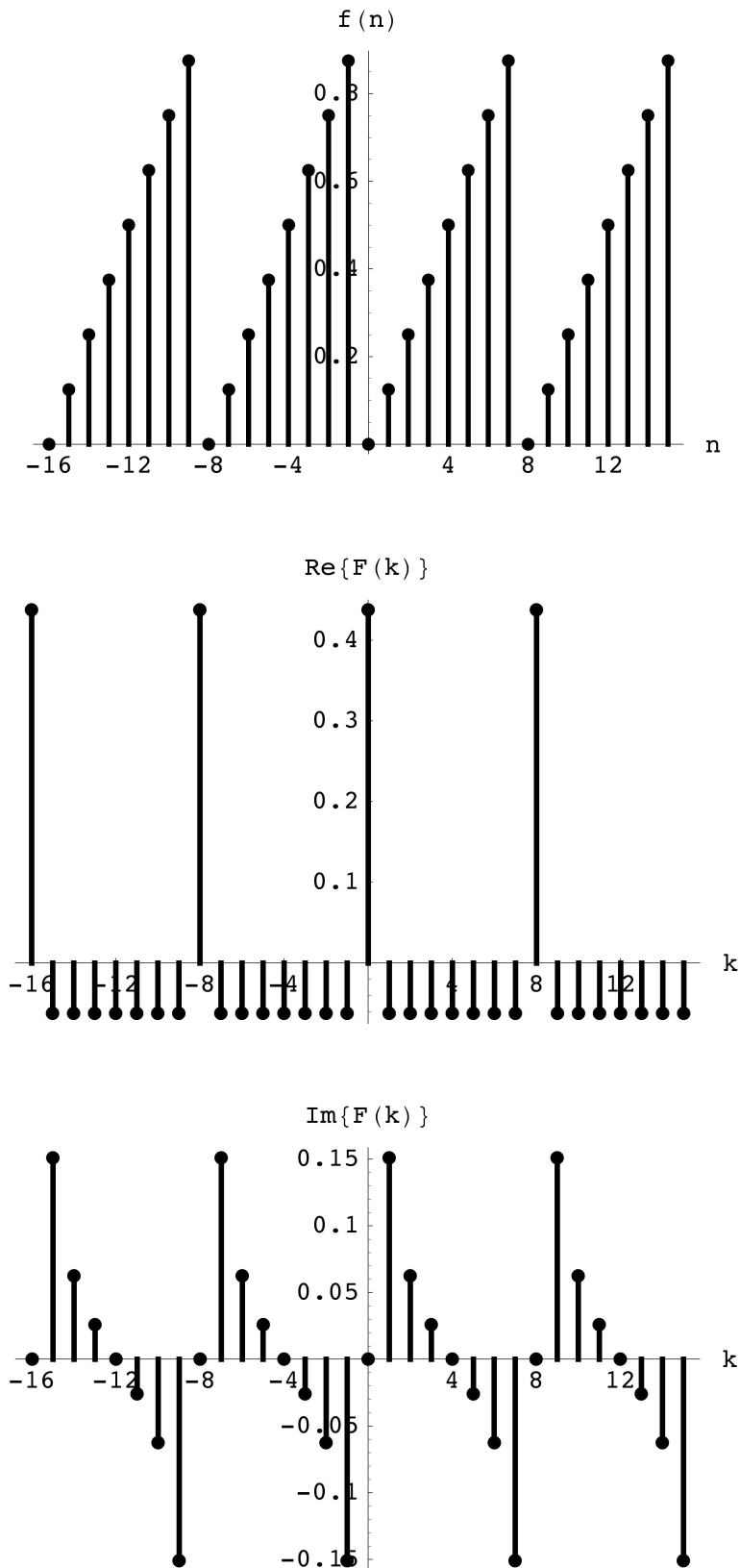


FIGURE 3. La fonction périodique de la forme "dent de scie",  $f_{2\pi}(t)$ , échantillonnée avec  $N = 8$  points par période ( $N\Delta t = 2\pi$ ) et la TFD correspondante. De haut en bas : La fonction discrète,  $f(n)$ , la partie réelle de  $F(k)$  et la partie imaginaire de  $F(k)$ . Dans cette figure on souligne la périodicité implicite de  $F(k)$ .

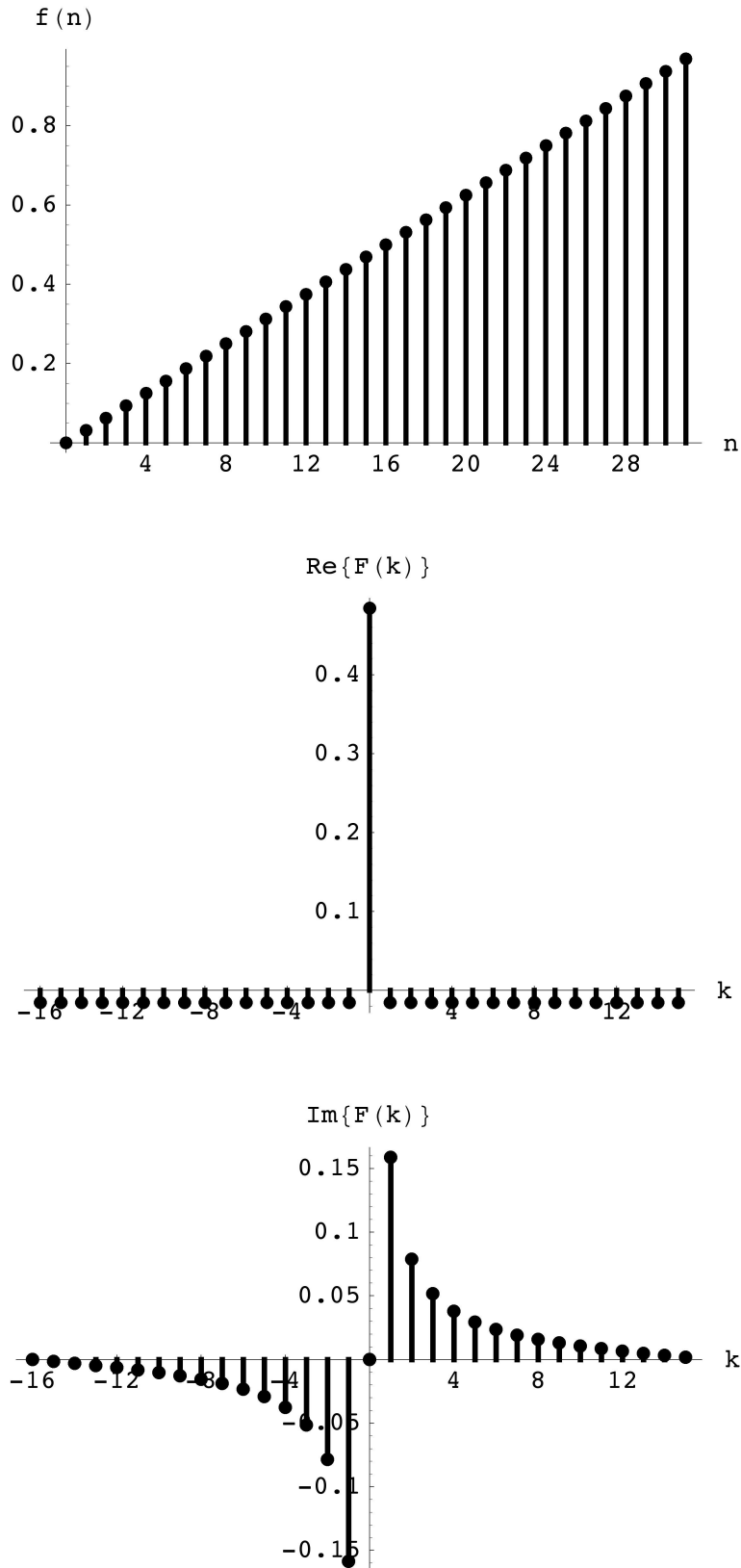


FIGURE 4. La fonction périodique de la forme "dent de scie",  $f_{2\pi}(t)$ , échantillonnée avec  $N = 32$  points par période ( $N\Delta t = 2\pi$ ) et la TFD correspondante. De haut en bas : La fonction discrète,  $f(n)$ , la partie réelle de  $F(k)$  et la partie imaginaire de  $F(k)$ .

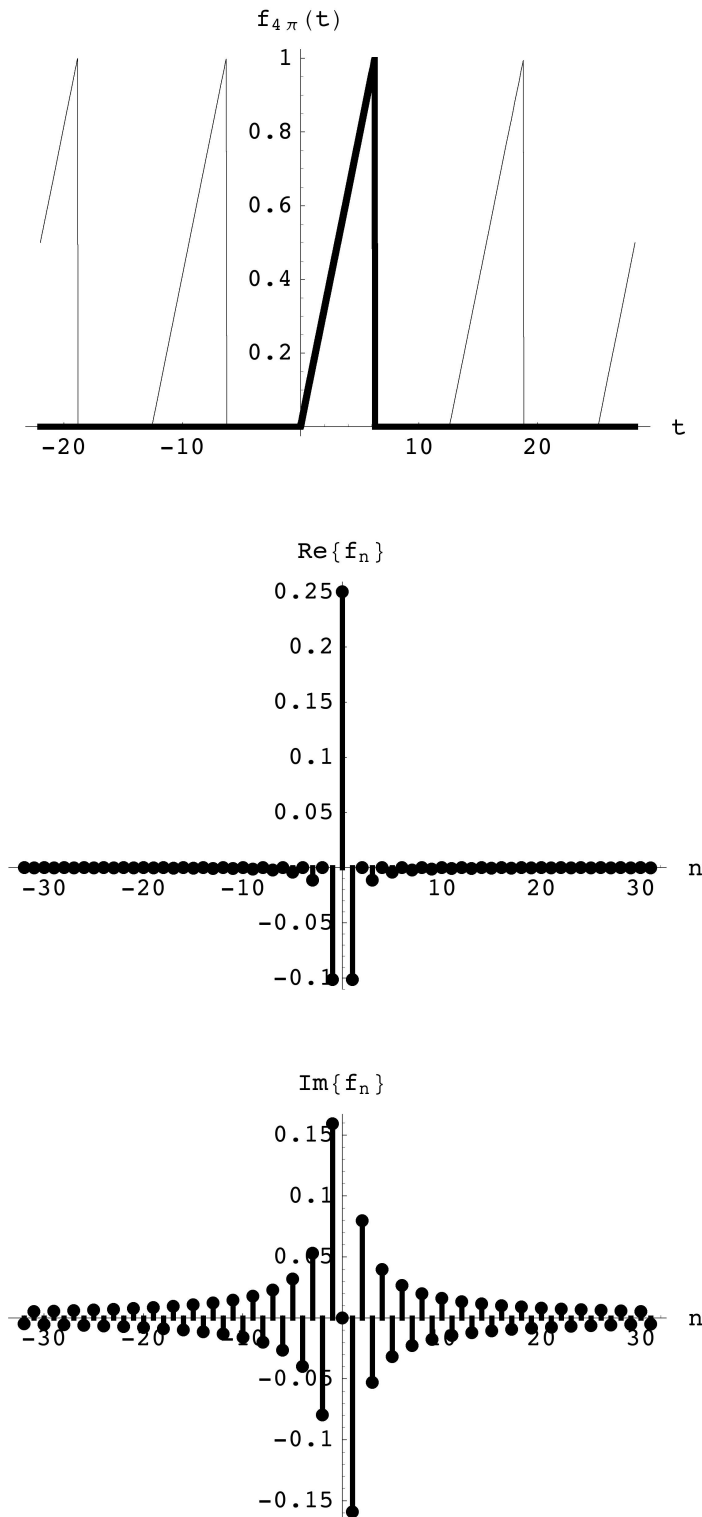


FIGURE 5. La continuation périodique de la fonction "dent de scie" avec une période  $T = 4\pi$  et ses coefficients de Fourier,  $\{f_n\}$ . De haut en bas :  $f_{4\pi}(t)$ , la partie réelle des  $\{f_n\}$  et la partie imaginaire de  $\{f_n\}$ .

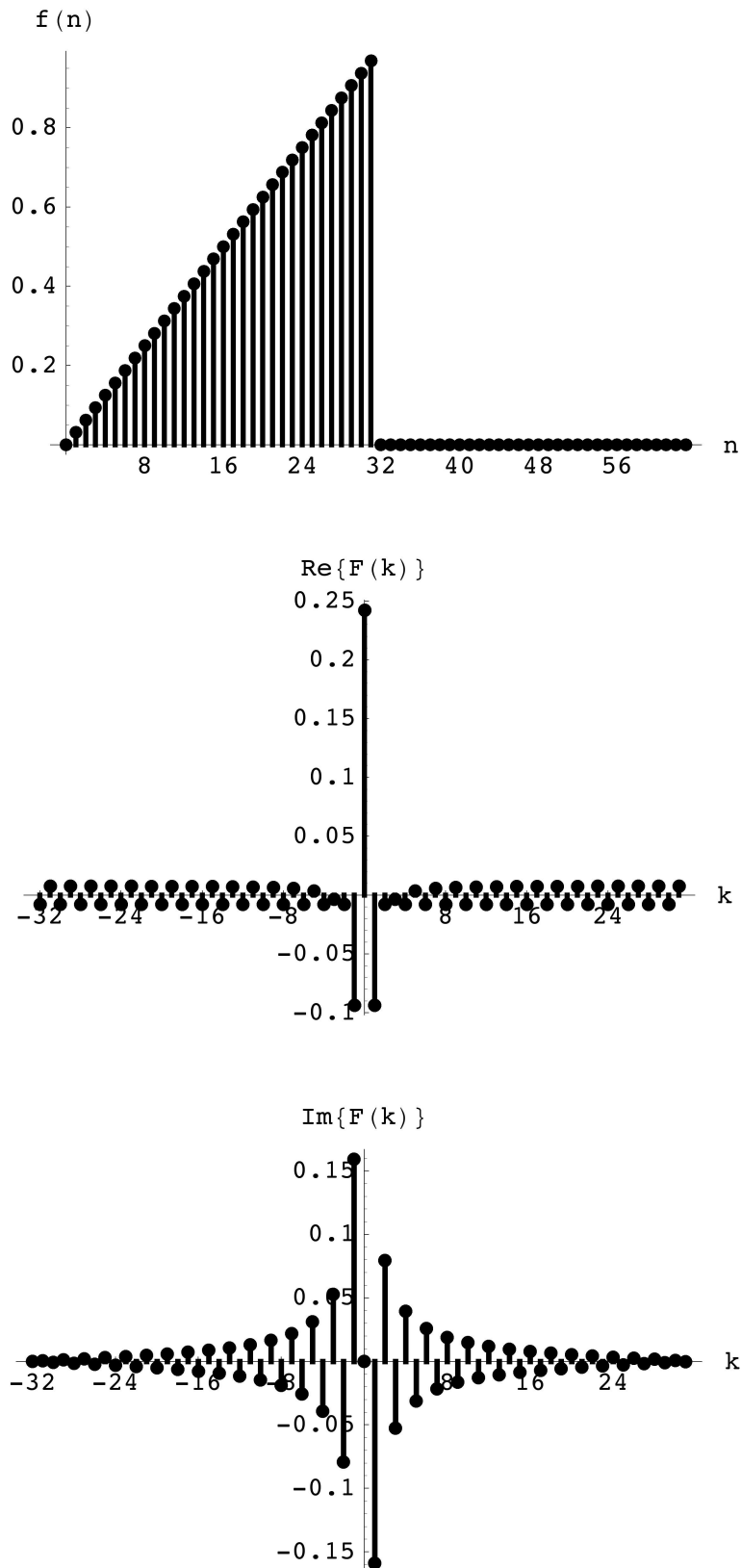
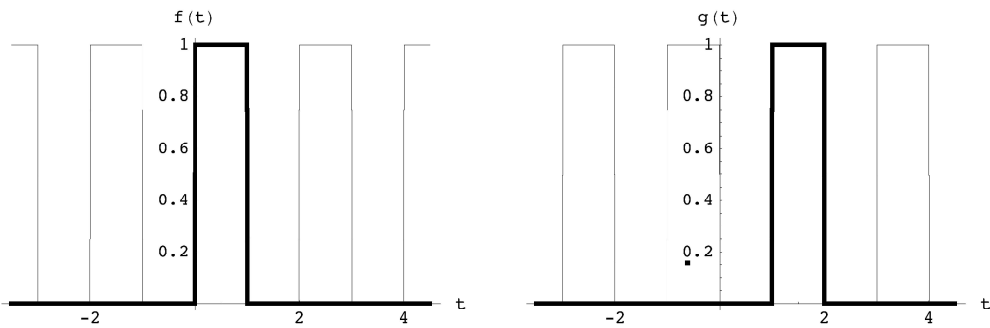


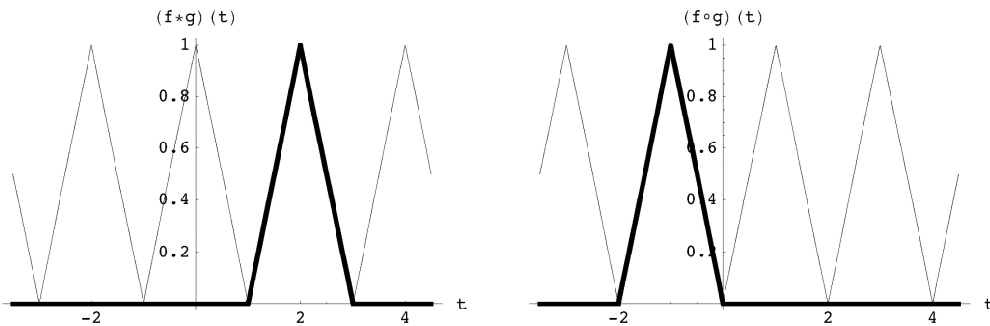
FIGURE 6. La fonction périodique de la forme "dent de scie",  $f_{4\pi}(t)$ , échantillonnée avec  $N = 64$  points par période ( $N\Delta t = 4\pi$ ) et la TFD correspondante. De haut en bas : La fonction discrète,  $f(n)$ , la partie réelle de  $F(k)$  et la partie imaginaire de  $F(k)$ .

## Signaux continus



### Convolution

### Corrélation



### Auto-convolution

### Auto-corrélation

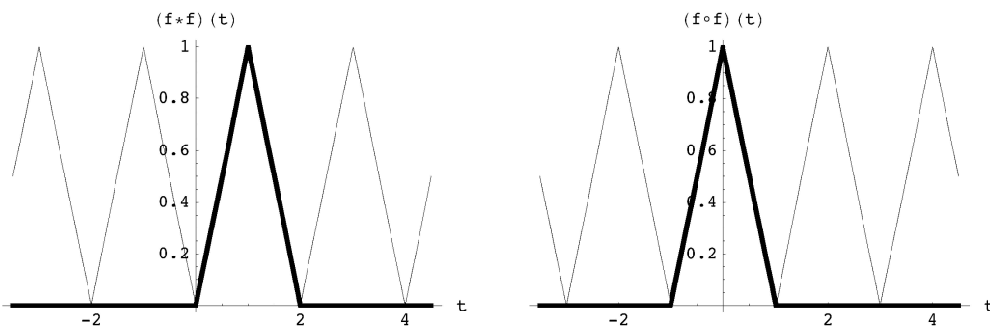
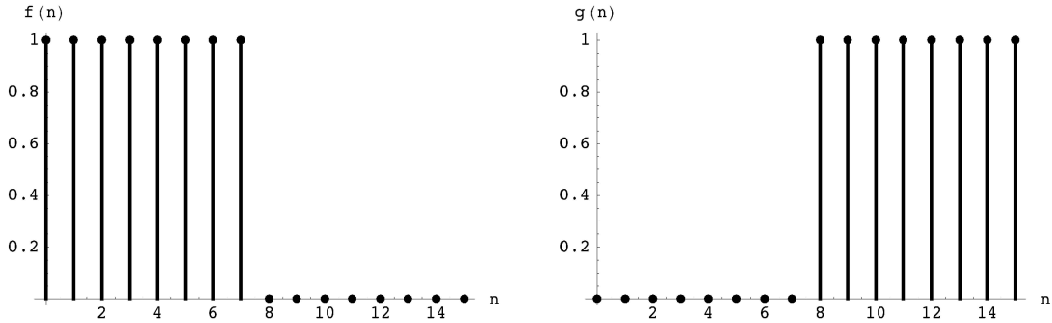
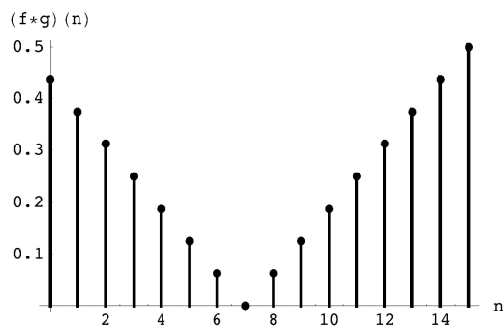


FIGURE 7. Les fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  définies dans les éqs. (68) et (69) (traits épais), leurs continuations périodiques avec la période 2 (traits fins), ainsi que les convolutions et les corrélations correspondantes.

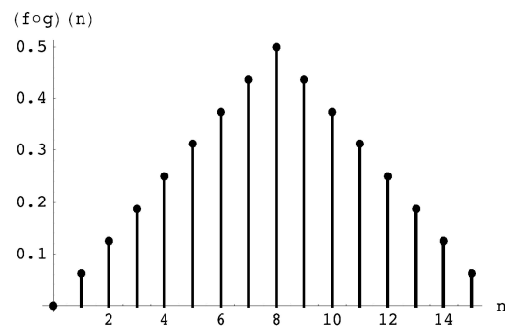
## Signaux discrets



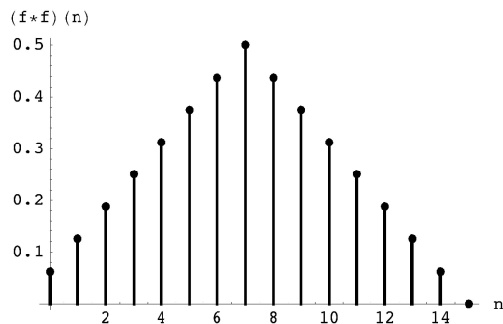
### Convolution



### Corrélation



### Auto-convolution



### Auto-corrélation

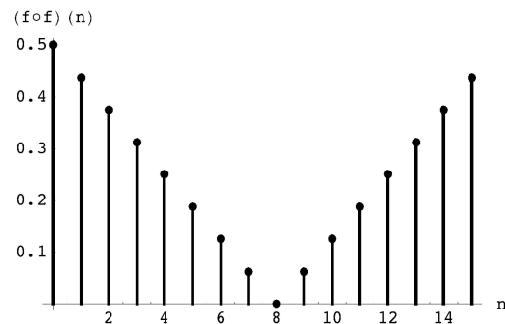


FIGURE 8. Convolution et corrélation numérique des fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  définies dans les éqs. (68) et (69). On rappelle que  $(f_T * g_T)(t)$  et  $(f_T \circ g_T)(t)$  dans la fig. 7 sont multipliées par  $T = 2$ .



## Chapitre 3

### Transformée en z

La transformée en  $z$  qui sera discuté dans ce chapitre est utile pour des calculs semi-analytiques qui sont basés sur l'approximation d'un signal par un modèle. Ce modèle est typiquement donné par une équation à différences finies.

#### 1. Définition

On considère un signal discret et *non-périodique*,

$$f(n) \equiv f(n\Delta t), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (80)$$

La transformée en  $z$  de  $f$  est définie par

$$\hat{F}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)z^{-n} \quad (81)$$

On utilisera également la notation

$$Z \{f(n), n, z\} \equiv \hat{F}(z). \quad (82)$$

La transformée  $\hat{F}(z)$  est toujours définie dans un *domaine de convergence* qui est souvent spécifié sous forme d'un anneau,

$$R_{min} < |z| < R_{max}. \quad (83)$$

Si la transformée en  $z$  existe sur le cercle trigonométrique on peut la relier à la transformée de Fourier discrète non-périodique. Il suit de la définition (17) que

$$\tilde{f}_{\Omega}(\omega) = \Delta t \hat{F}(\exp[-i\omega\Delta t]) \quad (84)$$

On définit également la transformée en *unilatérale* qui est définie par

$$\hat{F}_{>}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} \quad (85)$$

et qui s'applique au signaux qui sont par définition causaux,  $f(n) \equiv 0$  pour  $n < 0$ . Souvent la définition (85) est utilisée sans mentionner explicitement

qu'il s'agit de la transformée en z unilatérale. Analogue à la notation (82) on utilisera également

$$Z_{>} \{f(n), n, z\} \equiv \hat{F}_{>}(z). \quad (86)$$

Afin de trouver la transformation inverse à la transformée en z on utilise que<sup>1</sup>

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout  $m \in \mathbb{Z}$  et tout contour  $C$  qui inclut  $z = 0$ . Il suit alors de la définition de la transformée en z que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^k F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{k-n} = f(k+1).$$

Par conséquent (on renomme  $k \rightarrow n-1$ ) la transformée en z inverse est donnée par

$$\boxed{f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{n-1} F(z)} \quad (87)$$

Le contour doit être entièrement contenu dans le domaine de convergence de  $F(z)$ .

## 2. La transformée en z pour quelques exemples

**2.1. La fonction de Dirac discrète.** L'équivalent de la distribution de Dirac pour les fonction discrètes est la fonction de Dirac

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (88)$$

La définition de la transformée en z montre que  $Z \{\delta(n), n, z\} = 1$ , ou avec une autre notation

$$\boxed{\delta(n) \longleftrightarrow 1} \quad (89)$$

**2.2. La fonction de Heaviside discrète.** On définit

$$\Theta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad (90)$$

comme équivalent de  $\theta(t)$  pour les fonctions discrètes. Il suit que

$$Z \{\Theta(n), n, z\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{si } |z^{-1}| < 1.$$

1. voir cours "Techniques Mathématiques", chapitre "Calcul de résidus".

On a donc la correspondance

$$\boxed{\Theta(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1} \quad (91)$$

**2.3. Suite exponentielle causale.** Soit

$$f(n) = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{C}. \quad (92)$$

Il suit que

$$\hat{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \text{si } |az^{-1}| < 1,$$

ou bien que

$$\boxed{f(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|} \quad (93)$$

**2.4. Suite exponentielle anti-causale.** On considère maintenant une suite exponentielle qui est non-nulle pour  $n < 0$ ,

$$g(n) = \begin{cases} -a^n & \text{si } n < 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{C}. \quad (94)$$

La transformée en  $z$  est alors

$$\begin{aligned} \hat{G}(z) &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \stackrel{n \rightarrow -m}{=} - \sum_{m=1}^{\infty} (a^{-1}z)^m = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (a^{-1}z)^m \\ &= 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = 1 - \frac{a}{a-z} = \frac{z}{z-a}, \quad |a^{-1}z| < 1. \end{aligned}$$

La transformée en  $z$  de  $g(n)$  a donc la même forme que celle de  $f(n)$ , sauf que le domaine de convergence n'est pas le même,

$$\boxed{g(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|} \quad (95)$$

Ceci illustre que la forme seule de la transformée en  $z$  d'une fonction ne définit pas la fonction discrète correspondante.

### 3. Quelques règles de calcul

Les relations qui seront dérivées dans la suite s'appliquent à la transformée en  $z$  et la transformée en  $z$  unilatérale, sauf indication explicite.

**3.1. Linéarité.** On donne deux fonctions discrètes,  $f(n)$  et  $g(n)$ , dont les transformés en  $z$ ,  $\hat{F}(z)$  et  $\hat{G}(z)$ , respectivement, existent. Comme la transformation en  $z$  est une opération linéaire, il suit que

$$\boxed{\alpha f(n) + \beta g(n) \longleftrightarrow \alpha \hat{F}(z) + \beta \hat{G}(z), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}} \quad (96)$$

**3.2. Réflexion de l'axe de temps.** On donne une fonction discrète,  $f(n)$ , et sa transformée en  $z$ ,  $F(z)$ . Afin de trouver la transformée en  $z$  de  $f(-n)$  on écrit

$$\begin{aligned} Z \{f(-n), n, z\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) z^{-n} \stackrel{n \rightarrow -n'}{=} \sum_{n'=-\infty}^{-\infty} f(n') z^{n'} \\ &= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} f(n') z^{n'} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} f(n') \left(\frac{1}{z}\right)^{-n'}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{f(-n) \longleftrightarrow \hat{F}(1/z)} \quad (97)$$

Le domaine de convergence de  $F(\cdot)$  s'applique maintenant à la variable  $1/z$ . Exemple : Soit  $f(n) = \Theta(n)$ , tel que  $Z\{\Theta(n), n, s\} = z/(z-1)$ , où  $|z| > 1$ . Ici la relation (97) donnerait  $\Theta(-n) \longleftrightarrow 1/(1-z)$ , où  $|z| < 1$ .

**3.3. Signal conjugué complexe.** On donne une fonction  $f(n)$  et sa transformée en  $z$ ,  $F(z)$ , et on cherche la transformée en  $z$  de  $f^*(n)$ . Comme

$$Z \{f^*(n), n, z\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^*(n) z^{-n} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) (z^*)^{-n} \right\}^*,$$

il suit la correspondance

$$\boxed{f^*(n) \longleftrightarrow \hat{F}^*(z^*)} \quad (98)$$

Prenons la suite  $f(n) = \theta(n)a^n$  comme exemple. On avait vu que  $Z \{f(n), n, z\} = z/(z-a)$ , où  $|z| > |a|$ . Ici on trouve donc  $Z \{f^*(n), n, z\} = \{z^*/(z^*-a)\}^* = z/(z-a^*)$ . On doit également faire attention au domaine de convergence. Pour l'exemple on a d'abord formellement  $|z| > |a^*|$ . Ceci est équivalent à  $|z| > |a|$ . Ici les domaines de définition des transformées en  $z$  de  $f(n)$  et  $f^*(n)$  coïncident.

**3.4. Décalage de l'argument.** Soit  $f(n)$  une fonction discrète dont la transformée en  $z$  existe,  $f(n) \longleftrightarrow \hat{F}(z)$ , et on cherche la transformée en  $z$  de  $f(n+j)$ ,

où  $j \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} Z \{f(n+j), n, z\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+j)z^{-n} \\ &\stackrel{n \rightarrow n'-j}{=} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} f(n')z^{-(n'-j)} = z^j \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} f(n')z^{-n'} = z^j \hat{F}(z). \end{aligned}$$

Il suit la correspondance

$$\boxed{f(n+j) \longleftrightarrow z^j \hat{F}(z), \quad j \in \mathbb{Z}} \quad (99)$$

**3.5. Décalage de l'argument et transformation en z unilatérale.** Soit  $f(n)$  une fonction dont la transformée en z unilatérale existe,  $f(n) \longleftrightarrow \hat{F}_>(z)$ . On suppose que  $f(n) \equiv 0$  pour  $n < 0$  et on cherche la transformée en z unilatérale de  $f(n+j)$ , où  $j \in \mathbb{N}$ . Comme  $f(n) \equiv 0$  pour  $n < 0$ , il faut distinguer entre les décalages positifs et négatifs de l'argument.

$$\begin{aligned} Z_{>} \{f(n+j), n, z\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n+j)z^{-n} \stackrel{n \rightarrow n'+j}{=} \sum_{n'=j}^{+\infty} f(n')z^{-(n'-j)} = z^j \sum_{n'=j}^{\infty} f(n')z^{-n'} \\ &= z^j \left\{ \sum_{n'=0}^{\infty} f(n')z^{-n'} - \sum_{n'=0}^{j-1} f(n')z^{-n'} \right\} = z^j \left\{ \hat{F}(z) - \sum_{n=0}^{j-1} f(n)z^{-n} \right\}. \end{aligned}$$

Il suit alors la correspondance

$$\boxed{f(n+j) \longleftrightarrow z^j \hat{F}_>(z) - \sum_{n=0}^{j-1} f(n)z^{j-n}, \quad j \in \mathbb{N}} \quad (100)$$

Dans la cas d'un décalage négatif de l'argument on a

$$\begin{aligned} Z_{>} \{f(n-j), n, z\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n-j)z^{-n} \stackrel{n \rightarrow n'+j}{=} \sum_{n'=-j}^{+\infty} f(n')z^{-(n'+j)} \\ &= z^{-j} \sum_{n'=0}^{\infty} f(n')z^{-n'} = z^{-j} \hat{F}(z). \end{aligned}$$

Ici on trouve la correspondance

$$\boxed{f(n-j) \longleftrightarrow z^{-j} \hat{F}_>(z), \quad j \in \mathbb{N}} \quad (101)$$

#### 4. Théorème de convolution

Comme pour toutes les transformations qui ont été présentées jusqu'à présent, il y a également un théorème de convolution pour la transformée en z. Dans la discussion de la convolution rapide on a déjà utilisée la définition

$$(f * g)(n) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(n-j)g(j) \quad (102)$$

de la convolution discrète de deux fonctions *non-périodiques*. Il suit que

$$\begin{aligned} Z \{(f * g)(n), n, z\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-n} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(n-j)g(j) \right\} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g(j) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-n} f(n-j) \stackrel{n \rightarrow n'+j}{=} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g(j) \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} z^{-(n'+j)} f(n') \\ &= \underbrace{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} g(j)z^{-j}}_{\hat{G}(z)} \underbrace{\sum_{n'=-\infty}^{+\infty} z^{-n'} f(n')}_{\hat{F}(z)}. \end{aligned}$$

On obtient le théorème de convolution de la transformée en z,

$$(f * g)(n) \longleftrightarrow \hat{F}(z)\hat{G}(z) \quad (103)$$

Ce théorème reste valable pour la transformée en z unilatérale. On note d'abord que

$$(f * g)(n) = \sum_{j=0}^{n-1} f(n-j)g(j) \quad (104)$$

comme  $f(n) \equiv 0$  pour  $n < 0$  et  $g(n) \equiv 0$  pour  $n < 0$ . Avec ceci

$$\begin{aligned} Z_{>} \{(f * g)(n), n, z\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} f(n-j)g(j) \right\} = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} f(n-j)g(j) \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} g(j) \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f(n-j) \stackrel{n \rightarrow n'+j}{=} \sum_{j=0}^{\infty} g(j) \sum_{n'=-j}^{+\infty} z^{-(n'+j)} f(n') \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} g(j)z^{-j} \sum_{n'=-j}^{+\infty} z^{-n'} f(n') = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} g(j)z^{-j}}_{\hat{G}_{>}(z)} \underbrace{\sum_{n'=0}^{\infty} z^{-n'} f(n')}_{\hat{F}_{>}(z)}. \end{aligned}$$

On trouve la même correspondance que pour la transformée en  $z$  bilatérale,

$$(f * g)(n) \longleftrightarrow \hat{F}_>(z)\hat{G}_>(z) \quad (105)$$

### 5. Théorème de corrélation et théorème de Parseval

On rappelle que la convolution discrète de deux fonctions *non-périodiques* est définie par

$$(f \circ g)(n) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(n+j)g^*(j) \quad (106)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} Z \{(f \circ g)(n), n, z\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-n} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(n+j)g^*(j) \right\} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g^*(j) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-n} f(n+j) \stackrel{n \rightarrow n'-j}{=} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g^*(j) \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} z^{-(n'-j)} f(n') \\ &= \underbrace{\left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g(j)(1/z^*)^{-j} \right\}^*}_{\hat{G}^*(1/z^*)} \underbrace{\sum_{n'=-\infty}^{+\infty} z^{-n'} f(n')}_{\hat{F}(z)}. \end{aligned}$$

On trouve la correspondance

$$(f \circ g)(n) \longleftrightarrow \hat{F}(z)\hat{G}^*(1/z^*) \quad (107)$$

Cette relation n'est pas valable pour la transformée en  $z$  unilatérale. Dans ce cas le changement de la variable de sommation de  $n$  à  $n' = n + j$  a pour conséquence que la borne inférieure de  $n'$  est  $j$  et non 0. Par conséquent aucune relation utile pour la corrélation peut être dérivée pour la corrélation en  $z$  unilatérale.

Il suit de théorème de corrélation que

$$(f \circ f)(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{n-1} \hat{F}(z)\hat{F}^*(1/z^*).$$

En utilisant la définition de la corrélation discrète on trouve en particulier pour  $n = 0$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |f(j)|^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{-1} \hat{F}(z)\hat{F}^*(1/z^*).$$

On note que  $1/z^* = z$  si  $|z| = 1$  et  $\hat{F}(z)\hat{F}^*(1/z^*) = |\hat{F}(z)|^2$  dans ce cas. Si l'on choisit  $z(\phi) = \exp(i\phi)$  où  $\phi \in [-\pi, +\pi)$  pour le contour  $C$  dans l'intégrale

ci-dessus on a  $|z| = 1$  sur le contour et on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{-1} \hat{F}(z) \hat{F}^*(1/z^*) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \frac{dz}{d\phi} (z(\phi))^{-1} |\hat{F}(z(\phi))|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi |\hat{F}(\exp(i\phi))|^2. \end{aligned}$$

Avec  $j \rightarrow n$  on obtient l'identité

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi |\hat{F}(\exp(i\phi))|^2} \quad (108)$$

Ceci est le théorème de Parseval pour la transformée en z. Il est valable si  $\hat{F}(z)$  existe pour  $|z| = 1$ . On remarque qu'on peut effectuer un deuxième changement de variable,

$$\phi = \omega \Delta t, \quad \text{où } \omega \in [-\Omega/2, +\Omega/2], \quad \Omega = \frac{2\pi}{\Delta t}. \quad (109)$$

Avec les relations (108) et (84) on obtient une relation qui a une signification physique :

$$\boxed{\Delta t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega/2}^{+\Omega/2} d\omega |\tilde{f}_\Omega(\omega)|^2} \quad (110)$$

Ceci est visiblement une généralisation du théorème de Parseval de la transformée de Fourier <sup>2</sup>,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt |f(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\tilde{f}(\omega)|^2,$$

qui est de mieux en mieux approchée si  $\Delta t \rightarrow 0$  et qui est *exacte* si  $\tilde{f}_\Omega(\omega) = \tilde{f}(\omega)$  dans l'intervalle  $[-\Omega/2, +\Omega/2]$  et  $\tilde{f}(\omega) \equiv 0$  pour  $|\omega| > \Omega/2$  (voir le théorème de Shannon).

## 6. Transformée en z du produit de deux signaux

Dans le cours "Techniques Mathématiques" nous avons vu que la transformée de Fourier d'une convolution de deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  dans le temps est donnée par le produit des transformées de Fourier individuelles,  $\tilde{f}(\omega)$  et  $\tilde{g}(\omega)$ , respectivement. Comme la transformée de Fourier et son inverse ont presque la même forme, il existe également un théorème de convolution pour la transformée de Fourier inverse, qui relie une convolution de deux transformées de Fourier  $\tilde{f}(\omega)$  et  $\tilde{g}(\omega)$  au produit  $f(t)g(t)$ . On ne peut pas attendre une telle symétrie pour la transformée en z, car la dernière et son inverse ont des formes totalement différentes. Pourtant on peut dériver une

<sup>2</sup> voir cours "Techniques Mathématiques"



forme utile pour la transformée en  $z$  du produit de deux fonctions discrètes,  $f(n)$  et  $g(n)$ . On suppose que les transformées en  $z$  de ces fonctions existent et sont données par  $\hat{F}(z)$  et  $\hat{G}(z)$ , respectivement. Avec ceci on écrit

$$\begin{aligned} Z \{f(n)g(n), n, z\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)g(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C dw w^{n-1} \hat{F}(w) \right\}}_{f(n)} g(n)z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dw w^{-1} \hat{F}(w) \underbrace{\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \left(\frac{z}{w}\right)^{-n} \right\}}_{\hat{G}(z/w)}. \end{aligned}$$

On note la correspondance

$$\boxed{f(n)g(n) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_C dw w^{-1} \hat{F}(w) \hat{G}(z/w)} \quad (111)$$

La dérivation montre bien que  $\hat{F}$  et  $\hat{G}$  peuvent être interchangées dans cette formule. On note que le contour  $C$  doit être choisi tel que  $\hat{F}(w)$  et  $\hat{G}(z/w)$  existent.

L'identité (111) permet d'exprimer la transformée en  $z$  unilatérale par la transformée en  $z$  bilatérale. Utilisant la fonction de Heaviside discrète on peut écrire

$$\hat{F}_{>}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\Theta(n)z^{-n}.$$

En posant  $g(n) = \Theta(n)$  on déduit des identités (91) et (111) que

$$\boxed{\hat{F}_{>}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dw \frac{z}{w(z-w)} \hat{F}(w), \quad |w| < |z|} \quad (112)$$



## Chapitre 4

# Systemes linéaires et filtres

## 1. Représentation mathématique

**1.1. Généralités.** Dans la suite un système linéaire est une “boîte noire” qui transforme un signal d’entrée en un signal de sortie. Deux propriétés sont caractéristiques pour un système linéaire

(1) *Additivité :*

Si  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont deux signaux d’entrée qui sont transformés en  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ , respectivement, il suit que

$$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_1(t) + y_2(t) \quad (\text{additivité}).$$

(2) *Proportionnalité :*

Si  $x(t)$  est un signal qui est transformé en  $y(t)$ , il suit que

$$\alpha x(t) \longrightarrow \alpha y(t), \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (\text{proportionnalité}).$$

Dans la suite on considère des signaux continus et discrets. Les propriétés d’un système linéaire qui transforme un signal discret sont les mêmes que pour un système qui transforme un signal continu. Du point de vue mathématique un système linéaire est représenté par une convolution du signal d’entrée  $x(t)$  avec la fonction de transfert  $h(t)$ ,

$$\boxed{y(t) = (h * x)(t)} \quad (113)$$

La fonction de transfert décrit le système entièrement.

On voit facilement qu’un système linéaire est effectivement un filtre. En appliquant le théorème de convolution de la transformation de Fourier il suit de la relation (113) que

$$\boxed{\tilde{y}(\omega) = \tilde{h}(\omega)\tilde{x}(\omega)} \quad (114)$$

Toute contribution  $\tilde{x}(\omega)$  est pondérée par  $\tilde{h}(\omega)$ .

**1.2. Convolution numérique par TFD.** Une réalisation numérique d’un système linéaire est la convolution périodique, où l’on suppose que tous les signaux sont périodiques et ont la même période  $N$ ,

$$\boxed{y(n) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(n-j)x(j)} \quad (115)$$

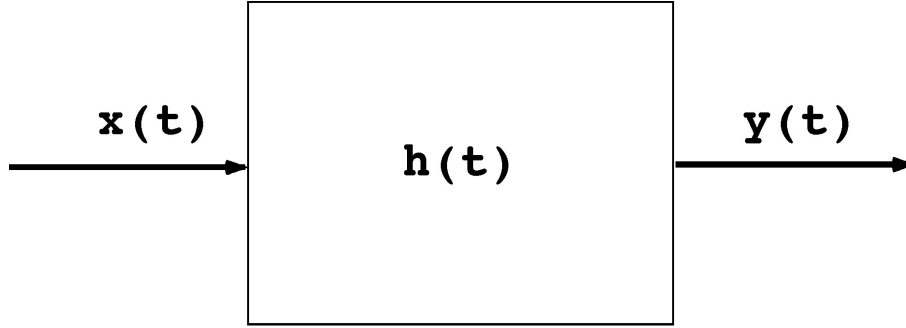


FIGURE 1. Système linéaire avec une entrée  $x(t)$ , une sortie  $y(t)$  et une fonction de transfert  $h(t)$ .

Le théorème de convolution donne ici.

$$\boxed{Y(k) = H(k)X(k)} \quad (116)$$

On rappelle que l'axe de temps et l'axe de fréquences (pulsations) sont discrétisés,

$$t = n\Delta t, \quad \omega = \frac{2\pi}{N\Delta t}k, \quad n, k \in \mathbb{Z}. \quad (117)$$

Avec (34) on a

$$\boxed{H(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right)} \quad (118)$$

pour le spectre périodique de  $h(n)$ .

**1.3. Réponse causale.** Un système physique répond à une excitation par un signal d'entrée *après* l'excitation. Formellement ce comportement est décrit par

$$h(t) \equiv 0, \quad \text{si } t < 0. \quad (119)$$

Dans ce contexte on suppose que le signal d'entrée a un début bien défini à  $t = 0$ . Comme la réponse du système linéaire est *causale* il suit que la réponse  $y(t) \equiv 0$  pour  $t < 0$ . Les signaux  $x(t), y(t)$  sont donc également nuls pour  $t < 0$ . Avec ces conditions on écrit

$$\boxed{y(t) = \int_0^t d\tau h(t - \tau)x(\tau) \longleftrightarrow \hat{y}(s) = \hat{h}(s)\hat{x}(s)} \quad (120)$$

pour la transformation d'un signal continu, et

$$\boxed{y(n) = \Delta t \sum_{j=0}^n h(n - j)x(j) \longleftrightarrow \hat{Y}_>(z) = \Delta t \hat{H}_>(z)\hat{X}_>(z)} \quad (121)$$

pour la transformation d'un signal discret. Ici  $\hat{f}(s)$  est la transformée de Laplace de  $f(t)$ <sup>1</sup> (voir cours "Techniques Mathématiques") et  $\hat{F}_>(z)$  est la transformée en  $z$  unilatérale du signal discret  $f(n)$ .

La spectre de Fourier de  $h(t)$  est donné par

$$\boxed{\tilde{h}(\omega) = \int_0^{\infty} dt \exp(-i\omega t)h(t) = \hat{h}(i\omega)} \quad (122)$$

est si la fonction de transfert est discrète et non-périodique on obtient

$$\boxed{\tilde{h}(\omega) = \Delta t \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-in\omega\Delta t)h(n) = \hat{H}(\exp[i\omega\Delta t])} \quad (123)$$

**1.4. Stabilité.** Une propriété importante qui est souvent imposée à un système linéaire est la *stabilité*. A cause de (120) on écrit pour un signal continu

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C ds \exp(st)\hat{h}(s)\hat{x}(s). \quad (124)$$

Comme chaque pôle de  $\hat{h}(s)$  donne une exponentielle par la transformation de Laplace inverse, on voit que

$$\boxed{\Re\{s_j\} \leq 0} \quad (125)$$

où  $\{s_j\}$  sont les pôles différents de  $\hat{h}(s)$ .

Dans le cas d'un signal discret on écrit avec (121)

$$y(n) = \frac{\Delta t}{2\pi i} \oint_C dz z^{n-1} H_>(z) X_>(z). \quad (126)$$

Ici chaque pôle  $z_j$  de  $H_>(z)$  donne une contribution  $\propto z_j^{n-1}$ . Pour cette raison le système est stable si

$$\boxed{|z_j| \leq 1} \quad (127)$$

## 2. Exemples

Dans la suite seront présentés quelques exemples qui illustrent différentes actions d'un système linéaire.

---

1. On rappelle que  $\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} dt \exp(-st)f(t)$ , avec  $\Re\{s\} > 0$ , est la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$ .

**2.1. Lissage numérique par TFD.** Un exemple simple qui représente la transformation d'un signal par un système linéaire est le lissage d'un signal périodique bruité par TFD. Le bruit peut être diminué par convolution du signal avec un noyau convenablement choisi. La figure (2) montre une application. Ici la fonction d'entrée est un cosinus de période  $T = 2\pi$  auquel est superposé un bruit,

$$x(n) = \cos(n\Delta t) + \xi(n), \quad N = 32, \quad (128)$$

où  $\Delta t = 2\pi/N$ . La fonction  $\xi(n)$  est réalisée par des nombres aléatoires entre  $-0.1$  et  $+0.1$ , ayant une distribution homogène. Le noyau  $h(n) = h(n + pN)$  est une fonction de la même période que  $x(n)$ ,

$$h(n) = \frac{T}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{n\Delta t}{\sigma}\right]^2\right), \quad -N/2 + 1 < n \leq N/2. \quad (129)$$

Dans l'exemple  $\sigma = \pi/10 \approx 0.314159$ . La convolution de  $x(n)$  avec  $h(n)$  est calculée par TFD, en appliquant le théorème de convolution,

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}nk\right) H(k)X(k). \quad (130)$$

On note que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} h(n) = N \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(n - pN), \quad (131)$$

tel que  $H(k) \rightarrow 1$  et  $y(n) = x(n)$ .

## 2.2. Différentiateur.

2.2.1. *Signaux continus.* Un différentiateur pour un signal continu est défini par l'action

$$\boxed{y(t) = \frac{dx(t)}{dt}} \quad (132)$$

Comme  $x(t) \equiv 0$  si  $t < 0$ , il est important de distinguer entre la dérivée droite et la dérivée gauche. On définit ( $\Delta t > 0$ )

$$\frac{d^+x}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad (133)$$

$$\frac{d^-x}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}. \quad (134)$$

Utilisant ces définitions on montre que

$$\frac{d^+x}{dt} \longleftrightarrow s\hat{x}(s) - x(0), \quad (135)$$

$$\frac{d^-x}{dt} \longleftrightarrow s\hat{x}(s). \quad (136)$$

Si  $x(t)$  est différentiable pour  $t > 0$  on peut utiliser la transformation de Laplace inverse afin de calculer  $y(t)$  à partir de  $\hat{y}(s) = s\hat{x}(s)$ . Le résultat est valable pour  $t > 0$ . Dans ce cas on a alors

$$\hat{h}(s) = s \quad (137)$$

et le spectre de  $h(t)$  est donné par

$$\tilde{h}(\omega) = i\omega \quad (138)$$

Ceci montre que les hautes fréquences du spectre de  $x(t)$  sont amplifiées. Avec (137) on trouve que

$$h(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) \quad (139)$$

dans le domaine du temps. On vérifie cette relation facilement en utilisant que  $f(t) = (\delta * f)(t)$ .

2.2.2. *Signaux discrets.* Un différentiateur pour un signal discret peut être défini par

$$y(n) = \frac{x(n) - x(n-1)}{\Delta t}, \quad n > 0 \quad (140)$$

Ici on a la correspondance

$$\frac{x(n) - x(n-1)}{\Delta t} \longleftrightarrow \frac{1}{\Delta t}(1 - z^{-1})\hat{X}_>(z).$$

La définition (140) de la dérivée numérique évite l'apparition de la valeur initiale  $x(0)$  dans sa transformée en  $z$ . Elle correspond donc à  $\frac{d^-x}{dt}$  pour les fonctions continues. En analogie, le résultat pour  $y(n)$  est définie pour  $n > 0$ . Dans la variable  $z$  on écrit  $\hat{Y}_>(z) = \hat{H}_>(z)\hat{X}_>(z)$ , où

$$\hat{H}_>(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t^2}. \quad (141)$$

Le spectre de Fourier devient

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{1 - \exp(-i\omega\Delta t)}{\Delta t} \quad (142)$$

Dans la limite  $\Delta t \rightarrow 0$  on retrouve  $\tilde{h}(\omega) = i\omega$  et la transformation en  $z$  inverse de (141) donne

$$h(n) = \frac{\delta(n) - \delta(n-1)}{\Delta t^2} \quad (143)$$

2.2.3. *Signaux périodiques discrets.* On donne un signal discret périodique  $x(n)$  dont la période est  $N$ . Comme pour les signaux non-périodiques on prend (140) comme définition pour la différentiation numérique. Avec la relation (45) pour la TFD d'une fonction avec un argument décalé on trouve que

$$Y(k) = \frac{1 - \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}k\right)}{\Delta t} X(k).$$

Par conséquent

$$H(k) = \frac{1 - \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}k\right)}{\Delta t}. \quad (144)$$

En utilisant la relation (37) on trouve par TFD inverse

$$\boxed{h(n) = \frac{N}{\Delta t} \left( \delta(n) - \delta(n-1) \right)} \quad (145)$$

sachant que  $h(n)$  est périodique avec la période  $N$ . La figure (3) montre un exemple qui illustre la dérivation numérique de  $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$  ( $N = 32$ ) par TFD. On calcule d'abord  $X(k)$ . Le résultat est multiplié avec  $H(k)$  donnée par (144) et on effectue finalement une TFD inverse. D'après le théorème de convolution de la TFD on obtient le même résultat par convolution directe avec  $h(n)$  qui est montré dans la même figure. On appelle cette méthode de différentiation numérique *différentiation spectrale*. La différentiation est effectivement calculée par une multiplication dans l'espace Fourier. L'exemple montre que le résultat de la différentiation numérique est une approximation de la relation  $\cos'(t) = -\sin(t)$ .

### 2.3. Intégrateur.

2.3.1. *Signaux continus.* L'intégrateur est défini par l'action

$$\boxed{y(t) = \int_0^t d\tau x(\tau)} \quad (146)$$

On peut également écrire

$$y(t) = \int_0^\infty d\tau \Theta(t - \tau)x(\tau) = (\Theta * x)(t), \quad (147)$$

où  $\Theta(t)$  est la fonction de Heaviside. Par conséquent la fonction de transfert de l'intégrateur est

$$\boxed{h(t) = \Theta(t)} \quad (148)$$

La transformée de Laplace de  $h(t)$  est

$$\hat{h}(s) = \frac{1}{s} \quad (149)$$



ce qui donne

$$\boxed{\tilde{h}(\omega) = \frac{1}{i\omega}} \quad (150)$$

pour le spectre de  $h(t)$ . Ceci montre que les hautes fréquences du spectre de  $x(t)$  sont atténuées. Au contraire à la différentiation, l'intégration est une opération de *lissage*. On note que l'intégrateur peut également être décrit par l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t), \quad y(0) = 0. \quad (151)$$

La transformation de Laplace de cette équation différentielle donne d'abord

$$s\hat{y}(s) - y(0) = \hat{x}(s).$$

Avec la condition initiale  $y(0) = 0$  on obtient

$$\hat{y}(s) = \frac{\hat{x}(s)}{s},$$

ce qui confirme la forme (149) pour  $\hat{h}(s)$ .

2.3.2. *Signaux discrets.* On donne un signal discret périodique  $x(n)$  dont la période est  $N$ . L'action de l'intégrateur est définie par

$$\boxed{y(n) = \Delta t \sum_{k=0}^n x(k)} \quad (152)$$

On en déduit l'équation aux différences finie équivalente

$$\frac{y(n) - y(n-1)}{\Delta t} = x(n). \quad (153)$$

Transformation en  $z$  de cette équation donne

$$(1 - z^{-1})\hat{Y}(z) = \Delta t \hat{X}(z)$$

et on en déduit que

$$\boxed{\hat{H}(z) = \frac{z}{z-1}} \quad (154)$$

Le spectre de Fourier de  $h(n)$  a donc la forme

$$\boxed{\tilde{h}(\omega) = \frac{\exp(i\omega\Delta t)\Delta t}{\exp(i\omega\Delta t) - 1}, \quad \omega \neq 0} \quad (155)$$

Dans la limite  $\Delta t \rightarrow 0$  on retrouve la relation (150) pour l'intégrateur de signaux continus. La transformation en  $z$  inverse de (154) donne

$$\boxed{h(n) = \Theta(n)} \quad (156)$$

Cette relation correspond à la relation (148) pour les signaux continus.

2.3.3. *Signaux périodiques discrets.* On donne un signal discret périodique  $x(n)$  dont la période est  $N$ . L'action de l'intégrateur est toujours définie par l'équation (eq :IntNum) et l'équation aux différences finies est (153). Avec la relation (45) on trouve ici

$$\frac{1 - \exp(-i\frac{2\pi}{N}k)}{\Delta t} Y(k) = X(k).$$

Ceci peut être écrit sous la forme

$$Y(k) = H(k)X(k),$$

où la TFD de la fonction de transfert est

$$H(k) = \begin{cases} \frac{\Delta t}{1 - \exp(-i\frac{2\pi}{N}k)} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad (157)$$

Le cas  $k = 0$  doit être traité séparément et on pose  $H(0) = 0$ . La figure 4 donne une illustration de l'intégration numérique par convolution / TFD. Comme pour la différentiation, on calcule d'abord  $X(k)$  et multiplie le résultat avec  $H(k)$  donnée par (157). Une TFD inverse donne le résultat de l'intégration. Ici on calcule numériquement  $\int_0^t d\tau \cos \tau = \sin t$ .

### 3. Systèmes récurrents

Dans la suite on discutera brièvement des systèmes récurrents qui sont caractérisés par le fait que le signal de sortie d'un système linéaire est partiellement reconduit à l'entrée. Un tel système est décrit par une équation différentielle dans le cas d'un signal continu et par une équation aux différences finies dans le cas d'un signal discret.

#### 3.1. Un exemple.

3.1.1. *Signaux continus.* On considère un régulateur qui a la tâche de maintenir une valeur  $y_{opt}$  constante d'un signal  $y(t)$ . La description mathématique se fait par l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} = -\alpha \{y(t) - y_{opt}\} + x(t)} \quad (158)$$

Ici  $dy/dt$  est définie comme dérivée droite (voir l'éq. (133)),

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^+ y}{dt} \longleftrightarrow s\hat{y}(s) - y(0). \quad (159)$$

On voit que la vitesse de changement de  $y(t)$  a deux composantes : La première est le signal extérieur  $x(t)$  d'entrée et la deuxième est proportionnelle et opposée à dérive de  $y(t)$  même par rapport à la valeur souhaitée  $y_{opt}$ . Supposons que l'entrée  $x(t)$  est donnée par

$$\boxed{x(t) = B \exp(-\lambda t), \quad \lambda \geq 0, B \in \mathbb{R}} \quad (160)$$

On trouve par transformation de Laplace de (158)

$$s\hat{y}(s) - y(0) = -\alpha\hat{y}(s) + \alpha\frac{y_{opt}}{s} + \frac{B}{s + \lambda}.$$

Ceci donne

$$\hat{y}(s) = \frac{B s + (s + \lambda) (y_{opt} \alpha + s y(0))}{s (s + \alpha) (s + \lambda)},$$

et on trouve par transformation de Laplace inverse

$$y(t) = y_{opt} + \frac{B \exp(-t \lambda)}{(\alpha - \lambda)} + \frac{\left\{ B + (\alpha - \lambda) (y_{opt} - y(0)) \right\} \exp(-t \alpha)}{(-\alpha + \lambda)} \quad (161)$$

Pour  $\lambda > 0$  la valeur optimale est toujours atteinte, mais pour  $\lambda = 0$  on atteint  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{opt} + B/\alpha$ .

3.1.2. *Signaux discrets.* Dans le cas de signaux discrets l'équation différentielle (158) devient une équation aux différences finies :

$$\frac{y(n+1) - y(n)}{\Delta t} = -\alpha \left\{ y(n) - y_{opt} \right\} + x(n) \quad (162)$$

On pose ici

$$x(n) = B a^n, \quad |a| < 1, B \in \mathbb{R} \quad (163)$$

Transformation en z unilatérale de (162) donne

$$\frac{z Y_{>}(z) - z y(0) - Y_{>}(z)}{\Delta t} = \frac{B z}{-a + z} + \frac{y_{opt} z \alpha}{-1 + z} - \alpha Y_{>}(z)$$

et la solution par rapport à  $Y_{>}(z)$  donne

$$Y_{>}(z) = \frac{z \Delta t \left( \frac{B}{-a+z} + \frac{y_{opt} \alpha}{-1+z} + \frac{y(0)}{\Delta t} \right)}{-1 + z + \alpha \Delta t}.$$

On trouve par transformation en z inverse

$$y(n) = y_{opt} (1 - (1 - \alpha \Delta t)^n) + y(0)(1 - \alpha \Delta t)^n + B \frac{\Delta t (a^n - (1 - \alpha \Delta t)^n)}{-1 + a + \alpha \Delta t} \quad (164)$$

Comme pour les signaux continus,  $y(n)$  converge vers la valeur  $y_{opt}$  souhaitée si  $\alpha > 0$ , et vers  $y_{opt} + B/\alpha$  si  $\alpha = 0$ .

#### 4. Le cas général

**4.1. Signaux continus.** Dans le cas général un système linéaire récursif est décrit par l'équation différentielle linéaire

$$\boxed{a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = x(t)} \quad (165)$$

pour un signal continu, où

$$y^{(k)}(t) = \frac{d^k y}{dt^k}$$

et  $\{a_k\}$  sont des constantes. Dans le cours "Techniques Mathématiques" nous avons vu que  $y(t)$  a la forme

$$y(t) = y_p(t) + y_0(t). \quad (166)$$

où  $y_p(t)$  est une solution *particulière* de (165) et  $y_0(t)$  est une solution de l'équation *homogène*

$$a_n y_0^{(n)}(t) + a_{n-1} y_0^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y_0^{(1)}(t) + a_0 y_0(t) = 0. \quad (167)$$

Comme la solution de cette équation linéaire représente la réponse d'un système linéaire à une entrée  $x(t)$ , on pose

$$x(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0 \quad (168)$$

Pour tout système physique la réponse est causale, tel que

$$y(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0 \quad \implies \quad h(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0. \quad (169)$$

Il est commode d'utiliser la transformation de Laplace afin de trouver la solution  $y(t)$ , car les conditions initiales sont automatiquement prises en compte. On rappelle que

$$y^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^n \hat{y}(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y^{(1)}(0) - \dots - y^{(n-1)}(0).$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle (165) on obtient une équation algébrique pour  $\hat{y}(s)$  qui peut être écrite sous la forme

$$\hat{y}(s) = \hat{y}_p(s) + \hat{y}_0(s), \quad (170)$$

où  $\hat{y}_p(s)$  est la transformée de Laplace d'une solution particulière qui est obtenue par

$$\boxed{y_p(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C ds \exp(st) \hat{h}(s) \hat{x}(s) = \int_0^t d\tau h(t-\tau) x(\tau)} \quad (171)$$

Ici  $h(t)$  est la fonction de transfert dont la transformée de Laplace a la forme

$$\boxed{\hat{h}(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}}. \quad (172)$$

Le solution de l'équation homogène dépend des conditions initiales et sa forme générale est

$$y_0(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{m_k-1} c_{kl} t^l \exp(s_k t). \quad (173)$$

Les coefficients  $\{c_{kl}t\}$  dépendent des conditions initiales,  $\{s_k\}$  sont les zéros différents du polynôme caractéristique  $P(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k$ , et  $N$  est le nombre de zéros différents. Chaque zéro  $s_k$  a la multiplicité  $m_k$ . L'équation (171) montre que la fonction de transfert qui détermine la solution particulière représente effectivement le système linéaire.

**4.2. Signaux discrets.** Un système linéaire pour un signal discret est en général décrit par une équation aux différences finies,

$$\boxed{\sum_{k=0}^P a_k y(n-k) = x(k)} \quad (174)$$

La solution peut être décomposée en une solution particulière et une solution de l'équation homogène,

$$y(n) = y_p(n) + y_0(n). \quad (175)$$

Comme pour les signaux continus, on considère un système physique avec une réponse causale. Pour une entrée avec

$$x(n) = 0 \quad \text{pour } n < 0 \quad (176)$$

on a alors

$$y(n) = 0 \quad \text{pour } n < 0 \quad \implies \quad h(n) = 0 \quad \text{pour } n < 0. \quad (177)$$

Pour la solution on applique la transformation en  $z$  unilatérale qui joue le même rôle que la transformation de Laplace pour les signaux continus. Afin de pouvoir intégrer les conditions initiales d'une manière automatique on écrit l'équation (178) sous la forme

$$\sum_{k=0}^P a_k y(n-k+P) = x(k+P). \quad (178)$$

Ici les décalages pour  $y(n)$  sont toujours positifs ou zéro, car  $P-k \geq 0$ . On rappelle que

$$f(n+j) \longleftrightarrow z^j \hat{F}_>(z) - \sum_{n=0}^{j-1} f(n) z^{j-n}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (179)$$

En appliquant la transformée en  $z$  unilatérale à l'équation (178) on obtient une équation algébrique en  $z$  pour  $\hat{Y}_>(z)$ . Cette solution a la forme

$$\hat{Y}_>(z) = \hat{Y}_>^{(p)}(z) + \hat{Y}_>^{(0)}(z) \quad (180)$$

où  $Y_{>}^{(p)}(z)$  est la transformée en  $z$  unilatérale d'une solution particulière et  $Y_{>}^{(0)}(z)$  celle d'une solution de l'équation homogène. On a

$$\hat{Y}_{>}^{(p)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C ds \hat{H}_{>}(z) \hat{X}_{>}(z), \quad (181)$$

ou  $\hat{H}_{>}(z)$  est la transformée en  $z$  de la fonction de transfert,

$$\hat{H}_{>}(z) = \frac{1}{a_P z^{-P} + a_{P-1} z^{-(P-1)} + \dots + a_1 z^{-1} + a_0}. \quad (182)$$

D'après le théorème de convolution de la transformée en  $z$   $y_p(n)$  peut être écrite sous forme d'une convolution

$$\boxed{y_p(n) = \sum_{j=0}^n h(n-j)x(j)} \quad (183)$$

On note que la solution de l'équation homogène a la forme

$$y_0(n) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{m_k-1} c_{kl} \left. \frac{d^l z^n}{dz^l} \right|_{z=z_k}. \quad (184)$$

Les  $\{c_{kl}\}$  sont des constantes qui dépendent des conditions initiales et les  $\{z_k\}$  sont les  $N$  zéros différents du polynôme

$$P(z) = \sum_{l=0}^P a_l z^{P-l}. \quad (185)$$

A chaque zéro  $z_k$  est associée une multiplicité  $m_k$ .

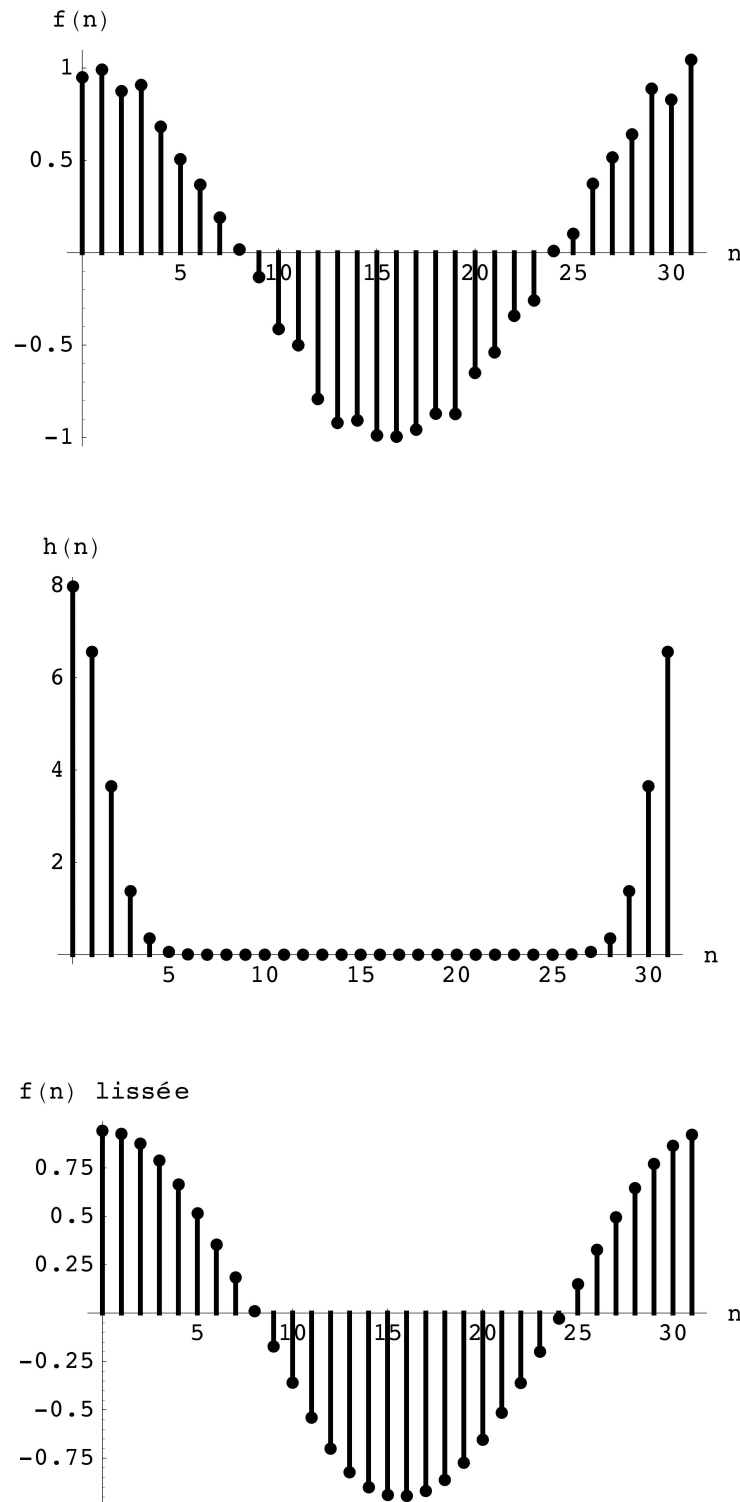


FIGURE 2. Lissage numérique d'un cosinus auquel est superposé un bruit blanc ( $N = 32$ ). De haut en bas : Le cosinus bruité, le noyau de lissage  $h(n)$  (une gaussienne de largeur  $\sigma = 0.05 \cdot 2\pi$ ) et la fonction lissée. Voir explications dans le texte.

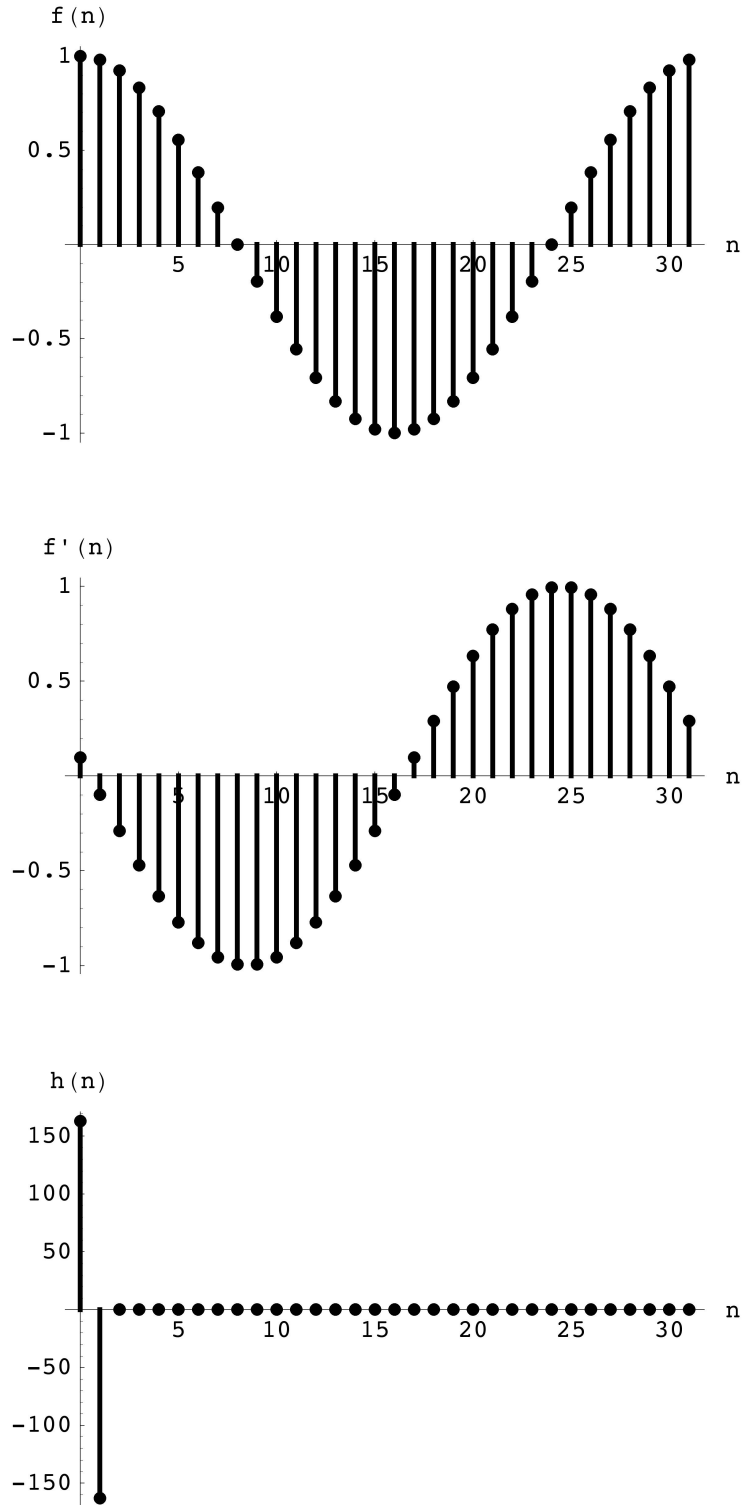


FIGURE 3. Différentiation numérique de  $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$  ( $N = 32$ ) par convolution / TFD. De haut en bas : La fonction  $x(n)$ , sa dérivée numérique et le noyau  $h(n)$  correspondant. Voir explications dans le texte.



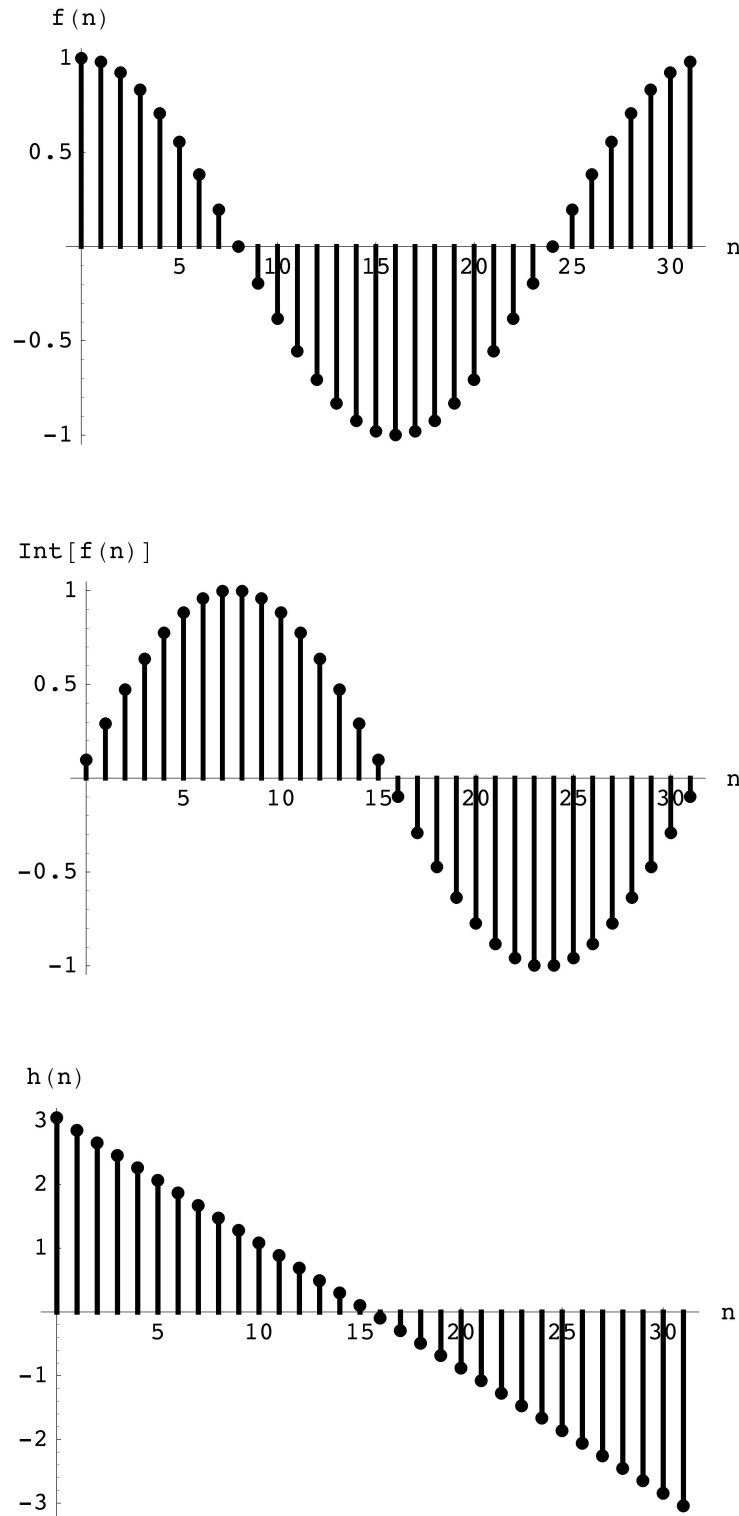


FIGURE 4. Intégration numérique de  $x(n) = \cos(\frac{2\pi}{N}n)$  ( $N = 32$ ) par convolution / TFD. De haut en bas : La fonction  $x(n)$ , son intégrale numérique et le noyau  $h(n)$  correspondant. Voir explications dans le texte.



## Bibliographie

- [1] E.O. Brigham. *The Fast Fourier Transform*. Prentice Hall, 1974.
- [2] F.S. Acton. *Numerical methods that work*. Mathematical Association of America, 1990.
- [3] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw Hill, 3rd edition, 1991.
- [4] A. Papoulis. *Signal Analysis*. McGraw Hill, 1984.
- [5] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1992.