Exercices Systèmes Dynamiques - Master (M1) de Physique

Feuille 1

1. On donne la fonction de Lagrange d'un système dynamique qui est décrit par la variable x,

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 - V_0(1 - \cos[kx]),$$

   où $M > 0, V_0 > 0, k \in \mathbb{R}$.

   (a) Dériver les équations du mouvement d'Euler-Lagrange.

   (b) Construire l'hamiltonien et les équations du mouvement associées.

   (c) Trouver les points critiques et faire une analyse de stabilité autour de ces points.

2. On donne les équations du mouvement

$$\dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = -\beta x_2(t)^2,$$

   où $\alpha > 0, \beta > 0$.

   (a) Montrer que les variables dynamiques vérifient $x_k(t) \geq 0$ ($k = 1, 2$) pour $t > 0$ si $x_k(0) \geq 0$.

   (b) Faire une analyse de stabilité pour un point (x_1, x_2) quelconque.

   (c) Y a-t-il un point fixe pour ce système dynamique ? On rappelle qu'un point fixe est défini par $\mathbf{X}_\infty := \lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t)$, où $\mathbf{X} \equiv (x_1, x_2)$.

   (d) Déterminer β tel que le volume de l'espace de phases engendré par x_1 et x_2 soit conservé pendant l'évolution du système dans le temps.

3. On considère une réaction chimique, où $x(t)$ est la concentration des molécules réagissantes,

$$\dot{x}(t) = \beta x(t)^2, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

   (a) Trouver la solution $x(t)$ pour la condition initiale $x(0) = x_0 > 0$ et faire un dessin schématique pour les cas $\beta > 0$ et $\beta < 0$. Donner une interprétation physique du résultat.

   (b) Pourquoi appelle-t-on une réaction du type (1) autocatalytique si $\beta > 0$?

Exercices Systèmes Dynamiques - Master (M1) de Physique
Feuille 2

1. On considère une particule dont la dynamique est décrite par la fonction de Lagrange
$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - V_0(\cosh kx - 1).$$
où $M > 0$, $V_0 > 0$, $k > 0$.
   (a) Dériver les équations d'Euler-Lagrange.
   (b) Construire l'hamiltonien et les équations du mouvement associées.
   (c) Construire l'hamiltonien "linéarisé" pour le cas $|kx| \ll 1$ et tracer schématiquement les trajectoires correspondantes dans l'espace de phases.
   (d) Montrer qu'il y a un seul point critique et faire une analyse de stabilité pour ce point. Relier le résultat de cette analyse à la forme des trajectoires trouvée en (1c).

2. On donne les équations du mouvement
$$\dot{x}_1 = -\alpha x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \beta x_1 - \gamma x_2,$$
où $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma \geq 0$.
   (a) Trouver le (seul) point critique et faire une analyse de stabilité pour $\gamma > 0$ et $\gamma = 0$.
   (b) On donne
$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\beta x_1^2 + \frac{1}{2}\alpha x_2^2$$
   Calculer dG/dt et dessiner schématiquement les trajectoires dans l'espace de phases pour $\gamma = 0$ et $\gamma > 0$.
   (c) Est-ce que le volume de l'espace de phases est conservé ?

3. On considère un système de N points matériels dont les équations du mouvement sans contraintes sont les équations de Newton,
$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}.$$
Ici $\mathbf{M}$ est la matrice diagonale des masses (voir cours) et $V(.)$ est l'énergie potentielle du système. A ce système on impose la contrainte
$$\frac{dE}{dt} = -2\gamma E_{\text{cin}}$$
où E et E_{cin} sont, respectivement, l'énergie totale et l'énergie cinétique du système, et $\gamma > 0$ est une constante de relaxation avec la dimension $1/$temps. Dériver l'équation du mouvement qui correspond à cette contrainte.