Corrigé examen *Ondes électromagnétiques dans les milieux matériels*, Licence de physique, Université d'Orléans (/20)
13/6/2012

Excercice **1** *(Equation d'onde) :* **10 points**

1. La dimension physique de μ est $1/m$ dans le système SI – plus généralement $[\mu] = 1/\text{longueur}$.
2. Insertion de $\psi(\mathbf{r}, t) = \exp(i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t])$, dans l'équation d'onde

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta\psi + \mu^2\psi = 0,$$

mène à

$$\left\{-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 + \mu^2\right\} \exp(i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t]) = 0,$$

où $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} > 0$. Comme l'exponentielle ne peut pas devenir nulle, on obtient la contrainte – ou bien la relation de dispersion

$$\boxed{-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 + \mu^2 = 0} \qquad (1)$$

3. Comme $k > 0$, la relation (1) mène à

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \mu^2}$$

pour une pulsation ω donnée. On voit que k devient imaginaire si $\omega^2/c^2 < \mu^2$. Définissant $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ l'onde plane $\exp(i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t]) = \exp(-|k|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ devient formellement une exponentielle décroissante dans la direction de propagation, $\mathbf{n}$ – on n'a plus de propagation. La pulsation de coupure est donc

$$\boxed{\omega_c = \mu c}$$

On rappelle que $\omega > 0$ par définition.

Excercice **2** *(Milieux anisotrope) :* **10 points**

1. Utilisant le tenseur ϵ_r donné, on trouve pour les composantes du tenseur réduit, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ avec la formule générale

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_r = \begin{pmatrix} \epsilon^r_{xx} - \frac{\epsilon^r_{xz}}{\epsilon^r_{zz}}\epsilon^r_{zx} & \epsilon^r_{xy} - \frac{\epsilon^r_{xz}}{\epsilon^r_{zz}}\epsilon^r_{zy} \\ \epsilon^r_{yx} - \frac{\epsilon^r_{yz}}{\epsilon^r_{zz}}\epsilon^r_{zx} & \epsilon^r_{yy} - \frac{\epsilon^r_{yz}}{\epsilon^r_{zz}}\epsilon^r_{zy} \end{pmatrix}$$

et la matrice

$$\boldsymbol{\epsilon}_r = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix},$$

pour le cas spécifique

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_r = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}}$$

Les valeurs propres sont données par

$$\det(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_r - \alpha \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} 4/3-\alpha & 0 \\ 0 & 3/2-\alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 4/3, \alpha_2 = 3/2.$$

Avec ceci les vitesses de phases principales sont

$$\boxed{c_1 = \frac{c_0}{\sqrt{4/3}},\ c_2 = \frac{c_0}{\sqrt{3/2}}}$$

2. (a) Afin de calculer les amplitudes $\mathbf{E}_0$ possibles on commence par les vecteurs propres de $\boldsymbol{\epsilon}^{(r)}$ qui sont associés aux vecteurs propres via $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_r \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}$. On voit immédiatement que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour les vecteurs propres normalisés à 1. Le champ électrique dans le plan $(x, y) \perp \mathbf{k}$ est donc donné par deux vecteurs de la forme

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{E}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

Pour la construction des amplitudes du champ électrique on utilise que (voir cours)

$$\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \\ -\frac{1}{\epsilon_{r,zz}}(\epsilon_{r,zx} E_{0,x} + \epsilon_{r,zy} E_{0,y}) \end{pmatrix}$$

où $E_{0,x}$ et $E_{0,y}$ sont les composantes du champ électrique $\perp$ à $\mathbf{k}$ qui sont données par les vecteurs propres $\tilde{\mathbf{E}}_{1,2}$. Avec $\tilde{\mathbf{E}}_{1,2}$ donnés en haut et la forme donnée de $\boldsymbol{\epsilon}_r$, on trouve

$$\boxed{\mathbf{E}_{0,1} = \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} E_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{0,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

(b) A partir de la relation générale $\partial_t \mathbf{B} = -\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{E}$ on trouve pour une onde plane (voir cours) $\mathbf{B} = \omega^{-1} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}$. Ceci donne pour l'exemple spécifique $\mathbf{B}_{1,2} = \mathbf{B}_{1,2}^{(0)} \exp(i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t])$ où

$$\boxed{\mathbf{B}_{0,1} = \frac{k}{\omega} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{E}_{0,1} = \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{0,2} = \frac{k}{\omega} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{E}_{0,2} = \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -E_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

(c) Utilisant que le vecteur de Poynting a la forme générale

$$\mathbf{S} = \Re\{\mathbf{E}\} \wedge \Re\{\mathbf{H}\}$$

ainsi que $\mathbf{E}_{1,2} = \mathbf{E}_{0;1,2} \cos(kz - \omega t)$ et $\mathbf{B}_{1,2} = \mathbf{B}_{0;1,2} \cos(kz - \omega t)$, on trouve

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \frac{E_1^2 k \cos^2(kz - t\omega)}{3\mu\omega} \\ 0 \\ \frac{E_1^2 k \cos^2(kz - t\omega)}{\mu\omega} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E_2^2 k \cos^2(kz - t\omega)}{\mu\omega} \end{pmatrix}.$$