Corrigé partiel *Mécanique Quantique*, Master E&M, parcours Physique (/20)

22/11/2010. Documents autorisés : notes de cours et de TD

***Excercice 1 :** Spin $1/2\,\hbar$* **10 points**

1. Dans le cours nous avons vu que
$$\langle \mathbf{S}(t)\rangle = \mathbf{D}(\mathbf{n},\omega_L t)\langle \mathbf{S}(0)\rangle,$$
où $\mathbf{n}$ contient les composantes du vecteur d'unité en direction du champ magnétique dans lequel le spin précède et ω_L est la pulsation de de précession. Ici $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et $\mathbf{n} = (0,0,1)^T$. Pour que $\langle \mathbf{S}(t)\rangle$ reste dans le plan $x-y$, cette condition doit être vérifiée pour $t=0$, i.e. $\langle S_z(0)\rangle \equiv 0$. Par conséquent
$$\boldsymbol{\chi}(0)^\dagger \boldsymbol{\sigma}_z \boldsymbol{\chi}(0) = 0.$$
Si l'on pose
$$\boldsymbol{\chi}(0) = a\,\boldsymbol{\chi}_+^z + b\,\boldsymbol{\chi}_-^z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$
la condition $\langle S_z(0)\rangle \equiv 0$ devient
$$\boxed{|a|^2 = |b|^2}$$

2. On construit le vecteur $\langle \mathbf{S}(0)\rangle$ par
$$\langle \mathbf{S}(0)\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\chi}(0)^\dagger \sigma_x \boldsymbol{\chi}(0) \\ \boldsymbol{\chi}(0)^\dagger \sigma_y \boldsymbol{\chi}(0) \\ \boldsymbol{\chi}(0)^\dagger \sigma_z \boldsymbol{\chi}(0) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} ba^* + ab^* \\ -iba^* + iab^* \\ 0 \end{pmatrix}$$
Comme $\vec{B} = B\vec{e}_x$, on a
$$\langle \mathbf{S}(t)\rangle = \mathbf{D}(\mathbf{e}_x,\omega_L t)\langle \mathbf{S}(0)\rangle,$$
où $\mathbf{D}(\mathbf{e}_x,\omega_L t)$ décrit une rotation autour de $\vec{e}_x$:
$$\mathbf{D}(\mathbf{e}_x,\omega_L t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega_L t) & -\sin(\omega_L t) \\ 0 & \sin(\omega_L t) & \cos(\omega_L t) \end{pmatrix}.$$
Avec ceci
$$\boxed{\langle \mathbf{S}(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} ba^* + ab^* \\ (-iba^* + iab^*)\cos(\omega_L t) \\ (-iba^* + iab^*)\sin(\omega_L t) \end{pmatrix}}$$

Excercice 2 : *Espace de Hilbert* **10 points**

1. Dans la base B les opérateurs $\hat{s}_{x,y,z}$ prennent la forme

$$\underbrace{\langle v_i|\hat{s}_x|v_j\rangle}_{s'_{z,ij}} = \sum_{k,l=1}^{2} \langle v_i|u_k\rangle \underbrace{\langle u_k|\hat{s}_x|u_l\rangle}_{s_{z,kl}} \langle u_l|v_j\rangle,$$

$$\underbrace{\langle v_i|\hat{s}_y|v_j\rangle}_{s'_{z,ij}} = \sum_{k,l=1}^{2} \langle v_i|u_k\rangle \underbrace{\langle u_k|\hat{s}_y|u_l\rangle}_{s_{z,kl}} \langle u_l|v_j\rangle,$$

$$\underbrace{\langle v_i|\hat{s}_z|v_j\rangle}_{s'_{z,ij}} = \sum_{k,l=1}^{2} \langle v_i|u_k\rangle \underbrace{\langle u_k|\hat{s}_z|u_l\rangle}_{s_{z,kl}} \langle u_l|v_j\rangle.$$

Avec la définition

$$\mathbf{U} := (\langle u_i|v_j\rangle) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

et les matrices de Pauli introduites en cours,

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\mathbf{s}'_x = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{s}_x \mathbf{U} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{s}'_y = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{s}_y \mathbf{U} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{s}'_z = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{s}_z \mathbf{U} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Utilisant la matrice $\mathbf{U}$ on écrit

$$\langle v_i|v_j\rangle = \sum_{l=1}^{2} \langle v_i|u_l\rangle\langle u_l|v_j\rangle = \sum_{l=1}^{2} U^*_{li} U_{lj} = \delta_{ij},$$

car $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{1}$.

3. Avec la définition de l'opérateur $\hat{U}$ on écrit

$$U^{(A)}_{ij} = \langle u_i|\hat{U}|u_j\rangle = \langle u_i|v_j\rangle = U_{ij}.$$

D'une manière similaire

$$U_{ij}^{(B)} = \langle v_i|\hat{U}|v_j\rangle = \sum_{k,l=1}^{2} \underbrace{\langle v_i|u_k\rangle}_{\{U_{ki}^{(A)}\}^*} \underbrace{\langle u_k|\hat{U}|u_l\rangle}_{U_{kl}^{(A)}} \underbrace{\langle u_l|v_j\rangle}_{U_{lj}^{(A)}} = \sum_{l=1}^{2} \delta_{il} U_{lj}^{(A)} = U_{ij}^{(A)}.$$

Avec ceci

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(A)} &= \mathbf{U}, \\ \mathbf{U}^{(B)} &= \mathbf{U}^{(A,\dagger)} \cdot \mathbf{U}^{(A)} \cdot \mathbf{U}^{(A)} = \mathbf{U}^{(A)} = \mathbf{U}. \end{aligned}$$