# Correction examen *Outils de la physique*
# L2 physique S3 (/20)

*03/01/2023. Documents autorisés : notes de cours et de TD*

***Excercice 1 :*** *Equations linéaires homogènes* **6 points**

Partant de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & a \end{pmatrix}.$$

on trouve par élimination de Gauss appliquée au système $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & a & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & a-9 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 & 0 \end{array}\right).$$

Conclusion : Avec le choix

$$\boxed{a = 5, \qquad x_3 \equiv \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{arbitraire}}$$

on obtient un ensemble de solutions, car $0 \times x_3 = 0$ est vrai pour n'importe quelle valeur (réelle) de $x_3$. Avec $x_3 = \lambda$, la solution recursive donne d'abord $-x_2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow x_2 = -2\lambda$, et ensuite $x_1 + 2(-2\lambda) + 3\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = \lambda$. On trouve donc

$$\boxed{\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

***Excercice 2 :*** *Rotations, vitesse angulaire* **8 points**

On utilise que $\mathbf{\Omega}_k = \dot{\mathbf{D}}_k \mathbf{D}_k^T$ ($k = 1, 2$), ce qui donne

$$\mathbf{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z^{(1)} & \omega_y^{(1)} \\ \omega_z^{(1)} & 0 & -\omega_x^{(1)} \\ -\omega_y^{(1)} & \omega_x^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z^{(2)} & \omega_y^{(2)} \\ \omega_z^{(2)} & 0 & -\omega_x^{(2)} \\ -\omega_y^{(2)} & \omega_x^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la rotation composée on obtient

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{D}^T = \left\{ \frac{d}{dt}(\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{D}_1) \right\} \cdot (\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{D}_1)^T &= \left\{ \dot{\mathbf{D}}_2 \cdot \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \dot{\mathbf{D}}_1 \right\} \cdot \mathbf{D}_1^T \cdot \mathbf{D}_2^T \\ &= \dot{\mathbf{D}}_2 \cdot \mathbf{D}_2^T + \mathbf{D}_2 \cdot \left\{ \dot{\mathbf{D}}_1 \cdot \mathbf{D}_1^T \right\} \cdot \mathbf{D}_2^T = \boldsymbol{\Omega}_2 + \mathbf{D}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \mathbf{D}_2^T \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 \cos(t\omega_2) & 0 \\ \omega_1 \cos(t\omega_2) & 0 & -\omega_1 \sin(t\omega_2) \\ 0 & \omega_1 \sin(t\omega_2) & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \sin(t\omega_2) \\ \omega_2 \\ \omega_1 \cos(t\omega_2) \end{pmatrix}}$$

***Excercice 3 :** Fonctions de matrices* **6 points**

Partant de

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J}_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et de la série de Taylor $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, on obtient

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{J}_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{J}_1^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \underbrace{\mathbf{J}_1^{2k}}_{(\mathbf{J}_1^2)^k = \mathbf{1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k)!} \underbrace{\mathbf{J}_1^{2k+1}}_{\mathbf{J}_1(\mathbf{J}_1^2)^k = \mathbf{J}_1} \\ = \cosh t\, \mathbf{1} + \sinh t\, \mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pour la première exponentielle, notant que la partie paire de $e^x$ est $(e^x + e^{-x})/2 = \cosh(x)$ et la partie impaire est $(e^x - e^{-x})/2 = \sinh(x)$. Pour la deuxième exponentielle on obtient simplement

$$e^{t\mathbf{J}_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{J}_2^n = \mathbf{1} + t\mathbf{J}_2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{\mathbf{J}_2^n}_{=\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$